3. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Saison 1963/1964

Aufgaben und Lösungen

3. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 031111:

Der 352 m hohe Antennenmast des Deutschlandsenders in Zehlendorf, Kreis Oranienburg, Bezirk Potsdam, ist zur Zeit das höchste Bauwerk Europas.

a) Wie groß ist die Fläche, die man von der Spitze des Mastes bei klarem Wetter überblicken kann? (Bei der Berechnung werden Erhebungen im Gelände vernachlässigt.)

b) Wie groß ist der prozentuale Fehler, der entsteht, wenn man in die Formel für die Kugelkappe $M = 2\pi Rh$ nicht die richtige Größe für die Höhe des Kugelabschnittes, sondern die Höhe des Antennenmastes einsetzt? Warum ist der Fehler sehr gering? (Radius der Erde $R = 6\,370$ km.)

Aufgabe 031112:

Eine Tasse enthält Milch und eine andere die gleiche Menge Kaffee. Man nimmt aus der ersten Tasse einen Löffel Milch und gießt ihn in die zweite Tasse. Man rührt um und gießt jetzt wieder einen Löffel (gleiche Menge wie oben) „Milchkaffee“ in die erste Tasse.

a) Befindet sich jetzt in der ersten Tasse mehr Kaffee als in der zweiten Tasse Milch? (Exakte Begründung der Antwort!)

b) Welches Ergebnis erhält man, wenn sich ursprünglich in der zweiten Tasse doppelt soviel Kaffee befand wie in der ersten Tasse Milch? (Begründung!)

Aufgabe 031113:

Beweisen Sie, daß $p^2 - 1$ für jede Primzahl $p \geq 5$ durch 24 teilbar ist!

Aufgabe 031114:

Bestimmen Sie alle reellen x, für die $\sin^2 x + \sin^2 2x > \sin^2 3x$ ist!

Aufgabe 031115:

Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ und den nicht parallelen Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$. Man bezeichne mit H den Schnittpunkt der Diagonalen und mit S den Schnittpunkt der nichtparallelen Seiten. Die Parallele zu $\overline{AB}$ durch H schneide die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ in E und F. Die Projektion von S auf EF sei G.

Beweisen Sie, daß die Gerade EF die Winkelhalbierende der Winkel BGC und AGD ist!

Aufgabe 031116:

Die Summe von 100 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen betrage $1\,000\,050$.

Wie heißt die kleinste, wie die größte dieser Zahlen?

3. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Lösungen

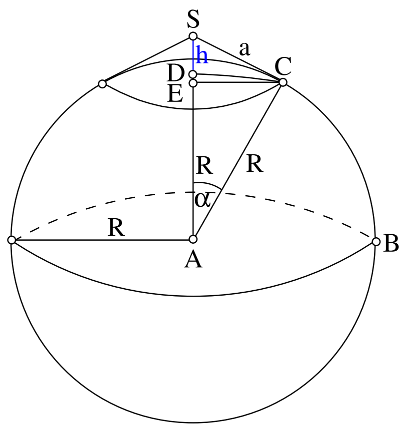
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 031111:

a) Um zunächst die Fläche $M = 2\pi RH$ der überschaubaren Kugelkappe zu berechnen, findet man zunächst mittels des Satzes des Pythagoras für die Sichtweite a den Ausdruck

$$a = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2}.$$

Dies gilt, da das Dreieck ΔACS rechtwinklig ist, denn die Sichtgerade kann als Tangente an den Kreis (die Erde) angesehen werden.



Mit E und C als Punkte auf der Grundseite der Kugelkappe sowie D als Punkt, an dem der Antennenmast die Erde berührt, sei H die Länge der Strecke DE. Dann gilt $\cos\alpha = \frac{a}{h+R} = \frac{h+H}{a}$ (die Dreiecke ΔACS und ΔECS sind ähnlich aufgrund eines gemeinsamen Winkels und des in beiden Dreiecken vorhandenen rechten Winkels) und damit auch

$$H = \frac{a^2}{h+R} - h = \frac{2Rh + h^2}{h+R} - h.$$

Damit erhält man als Ergebnis

$$M = 2\pi RH = 2\pi R\left(\frac{2Rh + h^2}{h+R} - h\right).$$

Für das gegebene Beispiel ist also $H \approx 351,98\text{m}$ und damit $M \approx 1,4088 \cdot 10^{10}\text{m}^2$.

b) h ist $100,005682\%$ von H, die Abweichung der Fläche ist also $0,005682\%$. Sie ist für $h \ll R$ deshalb so gering weil dann $H = \frac{2Rh+h^2}{h+R} - h \approx \frac{2Rh}{R} - h = h$ gilt.

Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Sattler

Lösung 031112:

a) Zu Beginn enthält die erste Tasse a Einheiten Milch, und die zweite Tasse a Einheiten Kaffee. Ein Löffel enthält $x \cdot a$ Einheiten Flüssigkeit, wobei $0 < x < 1$ gilt.

Jetzt wird ein Löffel von Tasse 1 nach Tasse 2 gegeben. Dann enthält die erste Tasse $a - x \cdot a$ Einheiten Milch, und die zweite Tasse a Einheiten Kaffee und $x \cdot a$ Einheiten Milch.

Jetzt wird ein Löffel von Tasse 2 nach Tasse 1 gegeben. Dieser enthält $x \cdot a$ Einheiten Flüssigkeit. Wichtig ist jetzt die Zusammensetzung der Flüssigkeit. In der 2. Tasse gibt es $a/(a+x\cdot a) = 1/(1+x)$ Anteile Kaffee und $x \cdot a/(a + x \cdot a) = x/(1 + x)$ Anteile Milch.

Damit enthält der Löffel $(1/(1 + x)) \cdot x \cdot a = x \cdot a/(1 + x)$ Einheiten Kaffee und $(x/(1 + x)) \cdot x \cdot a = x^2 \cdot a/(1 + x)$ Einheiten Milch. Somit enthält die erste Tasse jetzt $a - x \cdot a + x^2 \cdot a/(1 + x)$ Einheiten Milch und $x \cdot a/(1 + x)$ Einheiten Kaffee, und die zweite Tasse $a - x \cdot a/(1 + x)$ Einheiten Kaffee und $x \cdot a - x^2 \cdot a/(1 + x)$ Einheiten Milch.

Jetzt soll der Kaffee in der ersten Tasse mit der Milch in der zweiten Tasse verglichen werden. In der zweiten Tasse befinden sich $x \cdot a - x^2 \cdot a/(1 + x) = (x \cdot a + x^2 \cdot a - x^2 \cdot a)/(1 + x) = x \cdot a/(1 + x)$ Einheiten Milch. Das ist genauso viel, wie Kaffee in der ersten Tasse.

Es befindet sich also gleichviel Kaffee in der ersten Tasse wie Milch in der zweiten Tasse.

b) Analog zur ersten Teilaufgabe kann hier das Ergebnis bestimmt werden. Die Tasseninhalte sehen wie folgt aus:

Anfangszustand:

Tasse 1: a Einheiten Milch
Tasse 2: $2a$ Einheiten Kaffee

Nach dem 1. Umgießen:

Tasse 1: $a - xa$ Einheiten Milch
Tasse 2: $2a$ Einheiten Kaffee, xa Einheiten Milch

Nach dem 2. Umgießen:

Löffel: $2xa/(2 + x)$ Einheiten Kaffee, $x^2a/(2 + x)$ Einheiten Milch
Tasse 1: $a - xa + x^2a/(2 + x)$ Einheiten Milch, $2xa/(2 + x)$ Einheiten Kaffee
Tasse 2: $2a - 2xa/(2+x)$ Einheiten Kaffee, $xa - x^2a/(2+x) = 2xa/(2+x)$ Einheiten Milch

Auch hier befindet sich gleichviel Kaffee in der ersten Tasse wie Milch in der zweiten Tasse.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 031113:

Aufgrund der dritten binomischen Formel gilt: $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$.

Von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist stets genau eine durch 3 teilbar. Da p nach den Voraussetzungen nicht durch 3 teilbar sein kann, gilt entweder $3|(p-1)$ oder $3|(p+1)$. Somit ist 3 ein Teiler von $p^2 - 1$.

Desweiteren muss p eine ungerade Zahl sein. $p - 1$ und $p + 1$ sind demzufolge zwei aufeinander folgende gerade Zahlen und damit durch 2 teilbar. Von zwei aufeinander folgenden geraden Zahlen ist aber sogar genau eine durch 4 teilbar.

Es gilt also ebenfalls: $8|(p^2 - 1)$.

Da 3 und 8 teilerfremd sind, folgt aus $3|(p^2 - 1)$ und $8|(p^2 - 1)$ die Behauptung, dass $24|(p^2 - 1)$. $\square$

Aufgeschrieben und gelöst von Manuel Naumann

Lösung 031114:
Nach Additionstheoremen gilt

$$\begin{aligned}\sin^2 3x &= (\sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x)^2\\ &= \sin^2 x\cos^2 2x + \cos^2 x\sin^2 2x + 2\sin x\cos x\sin 2x\cos 2x\\ &= \sin^2 x(1-\sin^2 2x) + (1-\sin^2 x)\sin^2 2x + \sin^2 2x\cos 2x\\ &= \sin^2 x + \sin^2 2x - 2\sin^2 x\sin^2 2x + \sin^2 2x(1-2\sin^2 x).\end{aligned}$$

Also erfüllen genau die reellen x die Ungleichung $\sin^2 x + \sin^2 2x > \sin^2 3x$, die auch die Ungleichung $2\sin^2 x\sin^2 2x > \sin^2 2x(1-2\sin^2 x)$ erfüllen. Ist x ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$, so wird diese Ungleichung nie erfüllt, sonst folgt nach Division durch $\sin^2 x$

$$2\sin^2 x > 1 - 2\sin^2 x \quad \Leftrightarrow \quad |\sin x| > \frac{1}{2}.$$

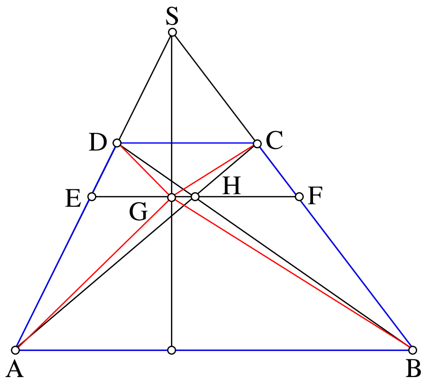
Da x kein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist, erfüllen alle

$$x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi - \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z},$$

die Ungleichung.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 031115:



Da $g_{SG} \neq g_{EF}$ ist, gilt auch $g_{SG} \neq g_{AB}$ und $g_{SG} \neq g_{CD}$. Daher schneidet g_{SG} die Geraden g_{AB} und g_{CD} in je einem Punkt L bzw. K. Wegen $G \neq E$ gilt $K \neq C$ und $L \neq B$.

Aus den Strahlensätzen folgt dann:

$$\frac{|KG|}{|GL|} = \frac{|CE|}{|EB|} = \frac{|CH|}{|HA|} = \frac{|CD|}{|AB|} \text{ und} \tag{1}$$

$$\frac{|SC|}{|SB|} = \frac{|KC|}{|LB|} = \frac{|CD|}{|AB|}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{|KG|}{|GL|} = \frac{|KC|}{|LB|} \text{ bzw. } \frac{|KG|}{|KC|} = \frac{|GL|}{|LB|}.$$

Da außerdem die Winkel $\sphericalangle CKG$ und $\sphericalangle GLB$ rechte sind, sind alle Dreiecke KGC und GLB ähnlich. Daher gilt: $\sphericalangle BGL \cong \sphericalangle KGC$.

Da weiter die Winkel $\sphericalangle SGE$ und $\sphericalangle EGL$ rechte sind, folgt $\sphericalangle BGE \cong \sphericalangle EGC$. $\square$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 031116:
Sei a die kleinste der 100 Zahlen, dann ist $a+99$ die größte der Zahlen. Die Summe der 100 Zahlen beträgt

$$\begin{aligned}&a + (a+1) + \ldots + (a+98) + (a+99)\\ &\quad = (a + (a+99)) + ((a+1) + (a+98)) + \ldots + ((a+49) + (a+50))\\ &\quad = \underbrace{(2a+99) + \ldots + (2a+99)}_{\text{50 Summanden}} = 100a + 4\,950,\end{aligned}$$

d.h. $100a = 995\,100$ bzw. $a = 9\,951$ und $a + 99 = 10\,050$. Also ist $9\,951$ die kleinste und $10\,050$ die größte der 100 Zahlen.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag