3. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Saison 1963/1964

Aufgaben und Lösungen

3. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 031021:

a) Beweisen Sie, daß die Zahl $2^{256} - 1$ keine Primzahl ist!

b) Geben Sie mindestens drei Primfaktoren dieser Zahl an!

Aufgabe 031022:
In einem Dreieck sei die Seite a größer als die Seite b. Die zu diesen Seiten gehörenden Höhen seien h_a und h_b.

a) Es ist zu beweisen, daß stets $a + h_a \geq b + h_b$ ist!

b) Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Aufgabe 031023:
Gegeben ist ein Trapez mit den parallelen Seiten a und b. Die Mittelpunkte seiner Diagonalen seien P und Q.

Berechnen Sie die Länge der Strecke PQ!

Aufgabe 031024:
In einem Kreiskegel, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, befindet sich eine Kugel, die den Mantel des Kegels berührt und deren Mittelpunkt die Höhe des Kegels im Verhältnis $1 : 2$ (von der Spitze aus) teilt. Der Durchmesser der Grundfläche des Kegels sei a.

Wie groß ist der Radius der Kugel?

Aufgabe 031025:
Durch welche Zahlen ist das Produkt dreier beliebiger, aber aufeinanderfolgender positiver ganzer Zahlen teilbar, deren Summe ungerade ist?

3. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 031021:

a) Mit Hilfe der dritten binomischen Formel kann man einen Term der Form $2^{2n} - 1$ in zwei Faktoren zerlegen. Es gilt: $2^{2n} - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1)$. Den Ausdruck $2^{256} - 1$ kann man, wenn man dieses Verfahren mehrfach anwendet, in mehrere Faktoren aufspalten.

$$2^{256} - 1 = (2^1 - 1)(2^1 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1)(2^{128} + 1)$$

b) $2^1 + 1 = 3$, $2^2 + 1 = 5$ und $2^4 + 1 = 17$ sind Primzahlen und damit Primfaktoren von $2^{256} - 1$.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuel Naumann

Lösung 031022:

a) Ist I der Flächeninhalt des Dreiecks, so gilt $ah_a = 2I$ und $bh_b = 2I$. Damit erhalten wir

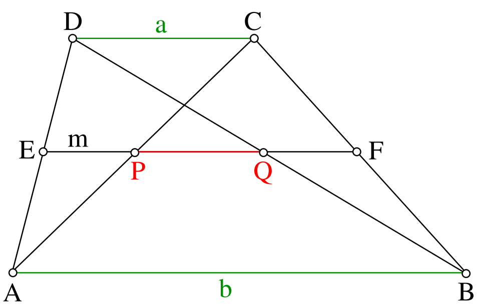
$$(a + h_a) - (b - h_b) = \left(a + \frac{2I}{a}\right) - \left(b + \frac{2I}{b}\right) = (a - b)\left(1 + \frac{2I}{ab}\right) \qquad (1)$$

Wegen $a \geq b\ (> 0)$ und $ab \geq ab \sin\gamma = 2I$ (γ ist die Größe eines Winkels, der von Dreiecksseiten mit den Längen a und b bestimmt wird) folgt hieraus die Aussage $a + h_a) - (b - h_b) \geq 0$, die mit der behaupteten gleichbedeutend ist.

b) Aus (1) folgt, daß $(a + h_a) - (b + h_b) = 0$ genau dann gilt, wenn $ab = 2I$ oder wenn $a = b$ ist, d.h., wenn das Dreieck rechtwinklig ist und a und b die Kathetenlängen sind, oder wenn das Dreieck gleichschenklig ist und a und b die Längen von Schenkeln sind.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 031023:



Als bekannt kann vorausgesetzt werden, daß die Länge der Mittellinie $m = \frac{a+b}{2}$ beträgt. Ferner ist offensichtlich, daß die Mittelpunkte der Diagonalen auch auf der Mittellinie m liegen.

Nun bleibt zu untersuchen, wie groß die Streckenlängen $\overline{EP}$ und $\overline{QF}$ sind:

Da die von A ausgehenden Strahlen AD und AC zwei Parallelen EP und DC schneiden, verhalten sich die Seiten $\overline{DC} : \overline{EP}$ wie $\overline{AD} : \overline{AE} = 2 : 1$, da die Mittellinie die Seite AD halbiert. Damit gilt $\overline{EP} = \frac{a}{2}$.

Ananlog erhält man $\overline{QF} = \frac{a}{2}$.

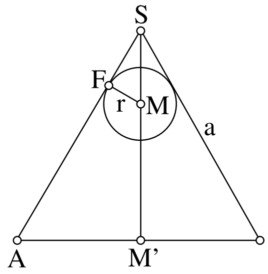
Setzt man diese Werte nun in die Ausgangsgleichung ein, so ergibt sich

$$\overline{PQ} = m - \overline{EP} - \overline{QF} = \frac{a+b}{2} - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 031024:

Sind SA Mantellinie und MF Lot von M auf g_{SA} (siehe Abbildung), so gilt nach dem 1. Ähnlichkeitssatz $\Delta MFS \sim \Delta AM'S$, also wegen $|AM'| = \frac{a}{2}$, $|SA| = a$ und $|MF| = r$



$$r : |SM| = \frac{a}{2} : a \text{ und damit}$$
$$r = \frac{|SM|}{2}.$$

Besitzt die Höhe des Kegelkörpers, d.h. des gleichseitigen Schnittdreiecks mit der Seitenlänge a, die Länge h, so gilt $h = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.

Nach Voraussetzung ist weiterhin $|SM| : |MM'| = 1 : 2$, woraus wegen $|SM'| = h$ folgt: $|SM| = \frac{h}{3}$, so daß sich schließlich $r = \frac{a}{12}\sqrt{3}$ ergibt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 031025:

Da die Summe ungerade ist, besteht das Produkt aus zwei geraden und einem ungeraden Faktor.

Jede gerade Zahl ist durch 2 teilbar.

Von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist genau eine durch 3 teilbar.

Von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist genau eine durch 4 teilbar.

Wegen der drei im Produkt enthaltenen Faktoren 2, 3 und 4 ist das Produkt stets durch 2, 3, 4, 6, 8, 12 und 24 teilbar. (Für das Beispiel der drei aufeinanderfolgenden Zahlen 2, 3 und 4 sind das auch die einzigen Teiler, denn $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.)

Aufgeschrieben von Burkhard Thiele – Quelle: (11)

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag