3. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1963/1964

Aufgaben und Lösungen

3. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030931:

Gesucht sind alle aus verschiedenen Ziffern bestehenden dreistelligen Zahlen, bei denen die Summe aller aus je zwei ihrer Ziffern zu bildenden zweistelligen Zahlen gleich dem Doppelten der Zahl ist.

Aufgabe 030932:

Jeder von vier Kreisen in einer Ebene habe mit den drei anderen genau je einen Punkt gemeinsam. Drei von ihnen haben den gleichen Radius r.

a) Führen Sie die Konstruktion durch ($r = 3\,\text{cm}$) und geben Sie eine Konstruktionsbeschreibung!

b) Berechnen Sie den Radius des vierten Kreises (Fallunterscheidungen)!

Aufgabe 030933:

Welche Punkte $P(x; 0)$ sind von dem Punkt $P_1(a; 0)$ doppelt so weit entfernt wie von $P_2(b; 0)$?

Bestimmen Sie die Abszissen dieser Punkte! ($b > a$)

Aufgabe 030934:

Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 110 355 024.

Wie lauten die Zahlen? Der Lösungsweg ist ausführlich zu begründen!

Aufgabe 030935:

Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Wenn in einem Trapez die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, so ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich dem Quadrat der Summe der Grundseiten (Parallelseiten).

Aufgabe 030936:

Bei einem Spiel verstecken drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihren Handtaschen je einen Gegenstand, und zwar einen Ball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat.

Auf seine Fragen erhält er folgende Antworten, von denen verabredungsgemäß nur eine wahr, die beiden anderen aber falsch sind:

(1) Anna hat den Ball.

(2) Brigitte hat den Ball nicht.

(3) Claudia hat die Schere nicht.

Wer hat den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere?

3. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 030931:

Die gesuchte Zahl z kann man aus ihren Ziffern wie folgt schreiben:

$$z = 100a + 10b + c \ \text{ (mit } \ 0 \leq a, b, c \leq 9 \ \text{ sowie } \ a \neq 0).$$

Jede zweistellige Zahl aus den Ziffern von z ergibt sich als $10x + y$ mit $x \in \{a, b, c\}$, $y \in \{a, b, c\}$ und $x \neq y$.

Die Gleichung lautet nun mit den 6 zweistelligen Zahlen aus den Ziffern von z:

$$\begin{aligned} 2 \cdot z &= 2 \cdot (100a + 10b + c) \\ &= (10a + b) + (10a + c) + (10b + a) + (10b + c) + (10c + a) + (10c + b). \end{aligned}$$

Zusammengefaßt ergibt sich: $200a + 20b + 2c = 22a + 22b + 22c$ und weiter: $178a = 2b + 20c$ bzw. nach dem Kürzen: $89a = b + 10c$.

Schätzt man den rechten Term nach oben ab, d.h. setzt man $b = 9$ und $c = 9$, so kommt man auf die Ungleichung $89a \leq 99$ und mithin $a \leq 1$. Dies impliziert $a = 1$ und ergibt für die beiden restlichen Ziffern $b = 9$ sowie $c = 8$.

Die gesuchte Zahl lautet also $z = 198$ und ist die einzige Zahl, die den geforderten Bedingungen genügt.

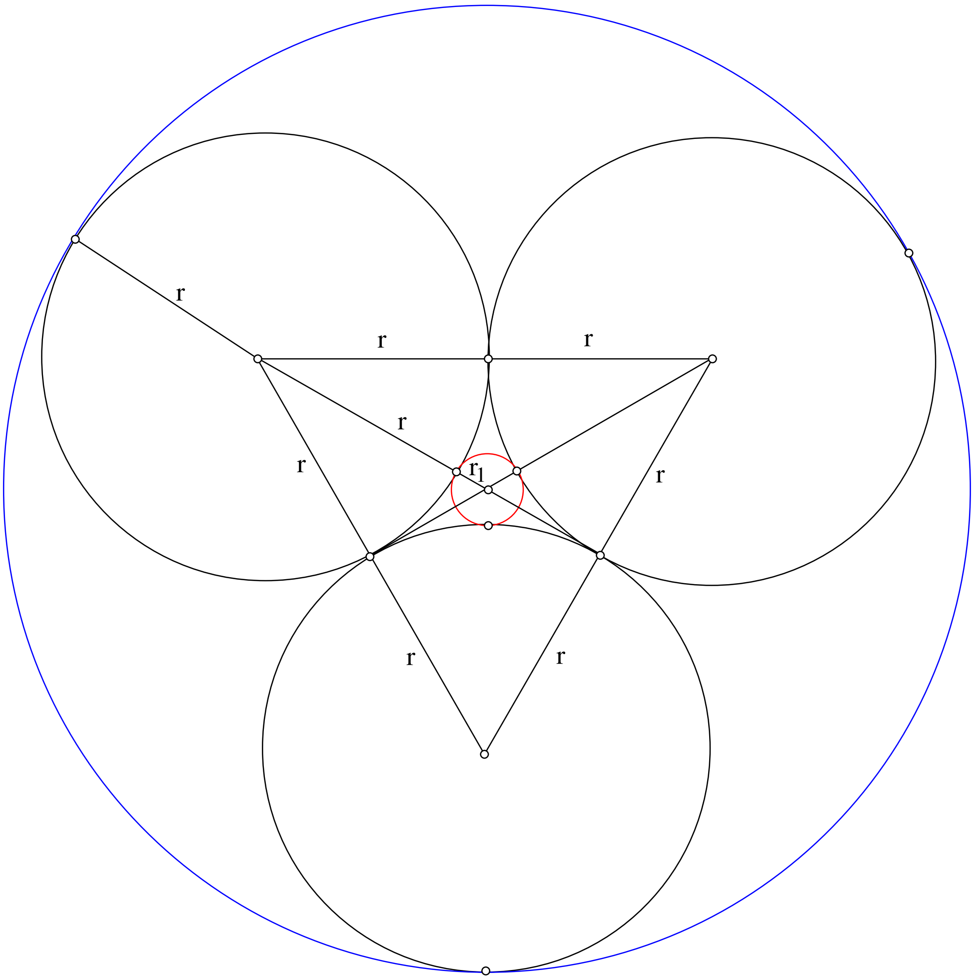
Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 030932:

Die beiden Lösungsmöglichkeiten entnehme man der Abbildung.

a) Die Mittelpunkte der 3 Kreise mit den Radien r bestimmen ein gleichseitiges Dreieck. Der Mittelpunkt der gesuchten Kreise ist der Schnittpunkt der Höhen bzw. der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks. Daraus ergibt sich die Konstruktion.

b) Da sich die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2 teilen, ergibt sich: $r + r_1 = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$ bzw. $r_1 = \frac{2}{3}r\sqrt{3} - r$ oder $r_1 = r\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1\right) \approx 0,15r$
$r_2 = 2r + r_1$ oder $r_2 = r\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right) \approx 2,15r$



Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 030933:

Es gilt: $|\overline{P_1P}| = 2 \cdot |\overline{P_2P}|$ sowie $|x - a| = 2 \cdot |x - b|$

1. Fall: $x \leq a < b$ tritt nicht auf, da P weiter von P_1 entfernt sein soll als von P_2.

2. Fall: $a \leq x \leq b$

$$\begin{aligned} x - a &= 2 \cdot (b - x) \\ 3 \cdot x &= 2 \cdot b + a \\ x &= (2 \cdot b + a)/3 \\ x &= a + (b - a) \cdot 2/3 \end{aligned}$$

3. Fall: $a < b \leq x$

$$\begin{aligned} x - a &= 2 \cdot (x - b) \\ x &= 2 \cdot b - a \end{aligned}$$

Die Punkte $(a + (b - a) \cdot 2/3; 0)$ und $(2 \cdot b - a; 0)$ sind von dem Punkt $P_1(a; 0)$ doppelt so weit entfernt wie von $P_2(b; 0)$.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 030934:

Die natürlichen Zahlen seien n, $n+1$, $n+2$, $n+3$.

Laut Voraussetzung ist $n(n+1)(n+2)(n+3) = 110\,355\,024$. Daraus folgt $n^4 < 111\,000\,000$, also $n < 104$.

Andererseits gilt $(n+3)^4 > n(n+1)(n+2)(n+3) > 100\,000\,000$, somit $n+3 > 100$, also $n > 97$. Damit gilt $97 < n < 104$.

110 355 024 ist nicht durch 5 teilbar, folglich ist auch keine der gesuchten Zahlen durch 5 teilbar.

Dies trifft nur für $n = 101$ zu. Die gesuchten Zahlen lauten also 101, 102, 103, 104.

Aufgeschrieben von Burkhard Thiele – Quelle: (11)

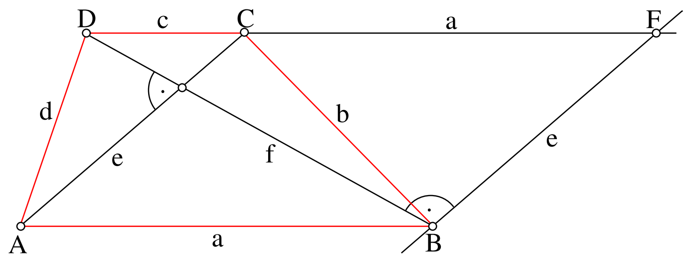
Lösung 030935:

Beweis:

In einem Trapez $ABCD$ seien die einander parallelen Grundseiten $\overline{AB} = a$ und $\overline{CD} = c$ und die Diagonalen $\overline{AC} = e$ und $\overline{BD} = f$.

Die Parallele zu AC durch B schneidet die Gerade CD in F. Dann ist $\overline{CF} = a$, also $\overline{DF} = a + c$ und $\overline{BF} = e$.

Da das Dreieck $\triangle BFD$ rechtwinklig ist, folgt aus dem Lehrsatz des Pythagoras $e^2 + f^2 = (a+c)^2$. $\square$



Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 030936:

Fall 1:

Die 1. Aussage ist richtig, dann hat Anna den Ball. Brigitte kann also den Ball nicht haben, womit die 2. Aussage ebenfalls wahr ist. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Verabredung. Somit ist die Annahme, daß die 1. Aussage wahr ist, falsch.

Fall 2:

Die 2. Aussage ist richtig, dann hat Brigitte den Ball nicht. Laut Verabredung sind die anderen beiden Aussagen falsch, also gilt deren Umkehrung: Anna hat den Ball nicht, sowie: Claudia hat die Schere. Wenn nun Anna und Brigitte den Ball nicht haben, muß ihn Claudia haben, was allerdings im Widerspruch zur Aussage, daß Claudia die Schere hat, steht. Damit ist auch die 2. Annahme falsch.

Fall 3:

Die 3. Aussage ist richtig, dann hat Claudia die Schere nicht. Nun müssen die 1. und 2. Aussage umgekehrt werden, damit sie richtig sind: Anna hat den Ball nicht. Brigitte hat den Ball. Dies bedeutet, daß Anna die Schere und Claudia den Bleistift hat. Hierin steckt kein Widerspruch, weshalb dieser Fall die Lösung ist.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag