3. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Saison 1963/1964

Aufgaben und Lösungen

3. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030911:

Die erste Kosmonautin der Welt, Valentina Tereschkowa, startete mit ihrem Raumschiff Wostock 6 am 16. Juni 1963 um 10.30 Uhr und landete nach 48 Erdumkreisungen am 19. Juni 1963 um 9.20 Uhr. Die durchschnittliche Flughöhe betrug 200 km. (Mittlerer Erdradius $R = 6\,370$ km.)

a) Wieviel Kilometer legte die Kosmonautin auf ihrem Raumflug zurück? (Zur Vereinfachung sei angenommen, daß der Start- und Landeplatz übereinstimmten und der Flug auf einer Kreisbahn erfolgte.)

b) Wie groß war die durchschnittliche Geschwindigkeit während des Raumfluges?

Aufgabe 030912:

Wolfgang befindet sich in einem Zug, dessen Eigengeschwindigkeit er mit 60 km/h gemessen hat. Er will die Geschwindigkeit eines entgegenkommenden Doppelstock-Gliederzuges ermitteln. Er weiß, daß dieser Doppelstock-Gliederzug einschließlich Lokomotive rund 120 m lang ist, und stoppt die Zeit, die der Zug zur Vorbeifahrt benötigt, mit genau 3,0 s.

Mit welcher Geschwindigkeit fährt der Gegenzug?

Aufgabe 030913:

a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $a = 5{,}6$ cm, $r = 3{,}5$ cm (Radius des Umkreises) und $\gamma = 60°$!

b) Beschreiben Sie die Konstruktion!

c) Berechnen Sie den Abstand des Umkreismittelpunktes von der Seite a!

d) Untersuchen Sie, für welche Maße des Umkreisradius die Konstruktion eines Dreiecks mit $a = 5{,}6$ cm und $\gamma = 60°$ nicht möglich ist!

Aufgabe 030914:

Beweisen Sie, daß die Summe von 1 000 beliebigen, aber aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen keine Primzahl ist!

Aufgabe 030915:

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Katheten gleich der Summe der Durchmesser von Um- und Inkreis.

Aufgabe 030916:

a) Auf einem Kreisumfang liegen 5 verschiedene Punkte beliebig verteilt. Wieviel Strecken kann man einzeichnen, die je zwei Punkte miteinander verbinden?

b) Welche Anzahl von Strecken wird ermittelt, wenn 10 Punkte auf dem Kreisumfang liegen?

c) Die Anzahl der Punkte sei n. Wieviel Strecken lassen sich einzeichnen? (Begründung!)

3. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 030911:

a) Gegeben sind der mittlere Erdradius $R = 6\,370$ km, die durchschnittliche Flughöhe $h = 200$ km und die Anzahl n der Erdumkreisungen, $n = 48$. Die Umlaufbahn soll als kreisförmig angenommen werden, Start- und Landepunkt seien identisch.

   Die zu ermittelnde Gesamtflugstrecke s setzt sich aus drei Teilstrecken zusammen: Der Startflugstrecke s_S zum Erreichen der Flughöhe nach dem Start, der Flugstrecke s_U, die während der Erdumkreisungen zurückgelegt wird, sowie der Landeflugstrecke s_L zum Verlassen der Flughöhe vor der Landung.

   Wir wollen im folgenden vereinfachend annehmen, daß die Flughöhe bei Start und Landung senkrecht über dem Start- bzw. Landepunkt erreicht bzw. verlassen werde. Wie man schnell erkennt, gilt dann $s_S = s_L = h$.

   Zur Berechnung der Strecke s_U ist es notwendig, den Umfang u des Umlaufkreises zu kennen – gilt doch offensichtlich $s_U = nu$. Der Umfang eines Kreises läßt sich aus seinem Radius r bestimmen; der Radius der Umlaufbahn ist natürlich die Summe aus Erdradius und Flughöhe, $r = R + h$.

   Somit berechnet sich die Gesamtflugstrecke s wie folgt:

$$\begin{aligned} s &= s_S + s_U + s_L \\ &= h + nu + h \\ &= 2h + 2n\pi r \\ &= 2h + 2n\pi(R + h) \\ &= 2 \cdot 200\text{ km} + 2 \cdot 48\pi(6\,370\text{ km} + 200\text{ km}) \\ &= 1\,982\,000\text{ km} \end{aligned}$$

b) Der Flug begann am 16. Juni um 10:30 Uhr und endete am 19. Juni um 9:20 Uhr; er dauerte also 2 Tage, 22 Stunden und 50 Minuten. Die Flugzeit t beträgt somit 4250 Minuten.
   Mit $s = 1\,982\,000$ km gemäß (a) ergibt sich die durchschnittliche Fluggeschwindigkeit v:

$$\begin{aligned} v &= \frac{s}{t} = \frac{1\,982\,000\text{ km}}{4\,250\text{ min}} \\ &= 466\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \\ &= 27\,980\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 7,77\,\frac{\text{km}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Sebastian Boesler

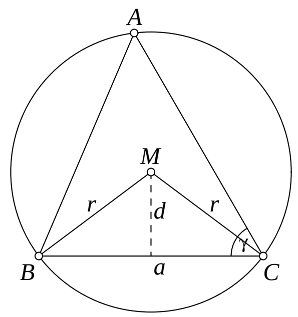
Lösung 030912:

Die beiden Züge bewegen sich aufeinander zu. Insbesondere bewegen sich dabei der Punkt, an dem Wolfgang seine Messungen durchführt, und das Ende des Gegenzuges aufeinander zu und reduzieren ihren Abstand in der Zeit $t = 3,0\,\text{s}$ um $s = s_W + s_G = 120\,\text{m}$, wobei s_W den Anteil der Strecke beschreibt, den Wolfgangs Zug zurücklegt, und s_W für die vom Gegenzug bewältigte Strecke steht.
Weiterhin ist die Geschwindigkeit v_W bekannt, mit der Wolfgangs Zug fährt: $v_W = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Die gesuchte Geschwindigkeit v_G des Gegenzuges berechnet sich damit wie folgt:

$$\begin{aligned} v_G &= \frac{s_G}{t} = \frac{s - s_W}{t} = \frac{s - v_W t}{t} = \frac{s}{t} - v_W \\ &= \frac{120\text{ m}}{3,0\text{ s}} - 60\frac{\text{km}}{\text{h}} = 84\frac{\text{km}}{\text{h}} \end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Sebastian Boesler

Lösung 030913:



a) s. Bild.

b) Man beginne mit der Seite a und bezeichne ihre Endpunkte mit B und C. Dann zeichne man Kreisbögen mit Radius r um die beiden Endpunkte von a, so dass ein Schnittpunkt entsteht. Dieser ist dann der Umkreismittelpunkt des gesuchten Dreiecks; er heiße M.

   Dann konstruiere man den Kreis um M mit Radius r, auf ihm muss der Punkt A liegen. Letzterer ensteht, wenn der Winkel γ an a in C so angetragen wird, dass γ ein Innenwinkel des erhaltenen Dreiecks ABC ist.

c) Das Dreieck BCM ist gleichschenklig. Aus dem Satz des PYTHAGORAS folgt dann für die Höhe auf a, die gleichzeitig der gesuchte Abstand d ist: $d = \sqrt{r^2 - (a/2)^2} = 2{,}1$ cm.

d) Das Dreieck BCM muss existieren, d.h. seine Dreiecksungleichung muss erfüllt sein: $2r \geq a$ oder $r \geq 2{,}8$ cm.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 030914:

Die erste der 1000 natürlichen Zahlen sei k. Dann erhält man folgende Summe: $k + (k+1) + (k+2) + \cdots + (k+999)$. Sie besteht aus 500 geraden und 500 ungeraden Zahlen, ist also gerade.

Aufgeschrieben von Burkhard Thiele – Quelle: (2)

Lösung 030915:

Es ist zu beweisen: $a + b = d_U + d_I$

Der Mittelpunkt des Inkreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Der Inkreis berührt jede Seite des Dreiecks. Damit ist jede Seite des Dreiecks eine Tangente an den Inkreis, die Strecke zwischen Berührungspunkt und Mittelpunkt steht somit senkrecht auf der jeweiligen Seite.

Der Flächeninhalt des Dreiecks kann über das ganze Dreieck oder 3 Teildreiecke berechnet werden:

$$\begin{aligned} A = a \cdot b/2 &= a \cdot r_I/2 + b \cdot r_I/2 + c \cdot r_I/2 \\ a \cdot b &= (a + b + \sqrt{a^2 + b^2}) \cdot r_I \\ r_I &= a \cdot b/(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}) \end{aligned}$$

Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Der Umkreis geht durch die Eckpunkte des Dreiecks. Die Katheten a und b bilden zusammen mit den Mittelsenkrechten ein Rechteck mit den Seitenlängen $a/2$ und $b/2$. Die Diagonale des Rechtecks beträgt r_U. Es gilt also:

$$r_U^2 = (a/2)^2 + (b/2)^2$$
$$r_U = \sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2}$$

Und ferner:

$$\begin{aligned} a + b &= d_U + d_I \\ &= 2 \cdot \sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2} + 2ab/(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} + 2ab/(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}) \\ &= ((a + b) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2 + 2ab)/(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}) \\ &= ((a + b) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + (a + b)^2)/(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}) \\ &= ((a + b) \cdot (\sqrt{a^2 + b^2} + a + b)/(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}) \\ &= a + b \quad \square \end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 030916:

c) Es seien $P_i, i \in \{1, ..., n\}$ die n Punkte auf dem Kreisumfang. Jeder Punkt P_i kann mit $n - 1$ Punkten $P_j, j \in \{1, ..., i-1, i+1, ..., n\}$ verbunden werden. Somit ergibt sich $n(n-1)$ als Gesamtzahl möglicher gerichteter Punkt-zu-Punkt-Verbindungen.

Strecken sind keine gerichteten Verbindungen zweier Punkte. Daher besitzt ein Paar $(\vec{P_iP_j}, \vec{P_jP_i})$ entgegengesetzt gerichteter Verbindungen zweier Punkte nur eine zugehörige Strecke, $\overline{P_iP_j}$. Die Gesamtzahl möglicher Strecken ist somit die Hälfte der Gesamtzahl möglicher gerichteter Verbindungen, also $\frac{n(n-1)}{2}$.

a) Mit c) ergibt sich für $n = 5$ eine Anzahl von

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

möglichen Strecken.

b) Mit c) ergibt sich für $n = 10$ eine Anzahl von

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

möglichen Strecken.

Aufgeschrieben und gelöst von Sebastian Boesler

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972