3. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Saison 1963/1964

Aufgaben und Lösungen

3. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030821:

Ein rechteckiges Maisfeld von 360 m Länge und 220 m Breite soll von zwei Mähhäckslern abgeerntet werden. Proben haben einen durchschnittlichen Bestand von 58 kg je 10 m^2 ergeben. Jeder Mähhäcksler kann stündlich 105 dt ernten.

a) In welcher Zeit wird das Maisfeld (bei ununterbrochenem Einsatz beider Maschinen) abgeerntet?

b) Für den Transport des Erntegutes stehen Hänger mit einem Fassungsvermögen von 3,5 t zur Verfügung. Jeder Hänger benötigt für das Be- und Entladen sowie für Hin- und Rückfahrt insgesamt 40 min (Umlaufzeit).

   Wieviel Hänger braucht man mindestens, wenn die Arbeit ununterbrochen vonstatten gehen soll?

Die Antworten sind zu begründen!

Aufgabe 030822:

Beweise die folgende Behauptung:

Wenn bei einer sechsstelligen Zahl die ersten drei Ziffern mit den letzten drei Ziffern übereinstimmen (z. B. 781 781), so ist die Zahl stets durch 7, 11 und 13 teilbar.

Aufgabe 030823:

In einer Aula stehen 300 Stühle in mehreren gleichlangen Reihen hintereinander. Nimmt man für den Mittelgang aus jeder Querreihe 3 Stühle heraus und bildet aus diesen Stühlen 5 neue Querreihen (mit Mittelgang), so bleibt die Anzahl der Sitzplätze gleich.

Wieviel Stühle standen ursprünglich in jeder Querreihe? Begründe deine Behauptung!

Aufgabe 030824:

Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD. X sei irgend ein Punkt der Strecke $\overline{AB}$ und Y ein Punkt der Strecke $\overline{CD}$.

Beweise, daß die Strecke $\overline{XY}$ stets von der Mittellinie des Trapezes halbiert wird!

Aufgabe 030825:

Gegeben seien ein Kreis und ein Punkt P in seinem Innern.

Konstruiere durch P zwei gleichlange aufeinander senkrecht stehende Sehnen. Beschreibe und begründe die Konstruktion!

3. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 030821:

a) Bei 360 m Länge und 220 m Breite hat das Feld eine Fläche von 79 200 m^2. Damit ergibt sich für den Bestand ein Gewicht von etwa $\frac{58\,\text{kg}}{10\,\text{m}^2} \cdot 79\,200\,\text{m}^2 = 459\,360\,\text{kg} = 4\,594\,\text{dt}$. Beide Mähhäcksler schaffen zusammen pro Stunde 210 dt zu ernten. Damit kommt man auf eine Zeit von $4\,594\,\text{dt} \,/\, 210\,\frac{\text{dt}}{\text{h}} \sim 22\,\text{h}$.

b) Da jeder Mähhäcksler $3,5$ t in 20 Minuten aberntet, braucht man insgesamt 4 Hänger.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 030822:
Beweis:

Eine sechsstellige Zahl x, deren erste drei und letzte drei Ziffern (a, b, c) übereinstimmen, kann man wie folgt in Zehnerpotenzschreibweise darstellen:

$$x = 100000 \cdot a + 10000 \cdot b + 1000 \cdot c + 100 \cdot a + 10 \cdot b + c.$$

Zusammengefaßt ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} x &= 100100 \cdot a + 10010 \cdot b + 1001 \cdot c = 1001 \cdot (100a + 10b + a) \\ &= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (100a + 10b + a). \end{aligned}$$

Der Klammerausdruck ist eine natürliche Zahl, weshalb unmittelbar die Teilbarkeit von x durch 7, 11 und 13 folgt. □

Aufgeschrieben und gelöst von Matthias Lösche

Lösung 030823:
Es gibt 300 Stühle in r Reihen und x Stühlen pro Reihe. Damit gilt: $300 = r \cdot x$ bzw. umgestellt: $r = \frac{300}{x}$

Nach dem Entfernen der Mittelgangstühle gibt es nicht mehr x sondern $x - 3$ Stühle pro Reihe und $r + 5$ Reihen, so daß sich wieder ergeben muß: $300 = (r + 5) \cdot (x - 3)$.

Setzt man nun diese Gleichungen ineinander ein, erhält man:

$$\begin{aligned} 300 &= \left(\frac{300}{x} + 5\right) \cdot (x - 3) \\ 300x &= (300 + 5x) \cdot (x - 3) \\ 300x &= 300x + 5x^2 - 900 - 15x \end{aligned}$$

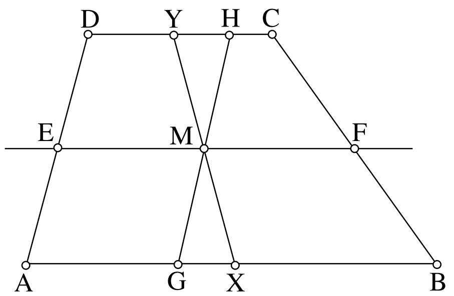
Dies führt zur quadratischen Gleichung $x^2 - 3x - 180 = 0$. Diese führt zu folgendem Ergebnis:

$$x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 180} = \frac{3}{2} \pm \frac{27}{2}$$

Dies führt zur einzigen Lösung (da x positiv und ganzzahlig sein muß) $x = 15$ und damit zu $r = \frac{300}{x} = \frac{300}{15} = 20$. Das heißt: Es gab ursprünglich 20 Querreihen mit je 15 Stühlen. Jetzt sind es 25 Querreihen zu 12 Stühlen. Nur für den aufgeführten Fall sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 030824:



Der Schnittpunkt der Strecke XY mit der Mittellinie EF sei M. Man ziehe durch M die Parallele zu AD. Diese schneide AB in G und CD in H.

Nun wird die Kongruenz der Dreiecke ΔGMX und ΔHYM nachgewiesen:

$$\begin{aligned} \sphericalangle MGX &= \sphericalangle MHY \text{ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen} \\ \sphericalangle GMX &= \sphericalangle HMY \text{ Scheitelwinkel} \\ \overline{MG} &= \overline{MH} \end{aligned}$$

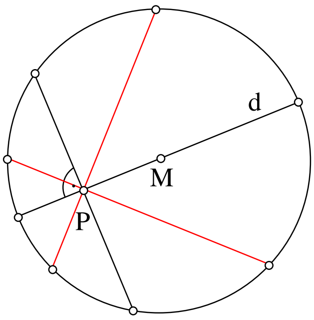
Die dritte Gleichheit kommt daher, daß die Vierecke $AGME$ und $EMHD$ Parallelogramme sind mit einer gleichen Seite (EM) und $AE = ED$, da die Mittellinie die Trapezseite halbiert.

Wenn nun die beiden Dreiecke ΔGMX und ΔHYM kongruent sind, so sind auch ihre Seiten MX und MY gleich lang. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

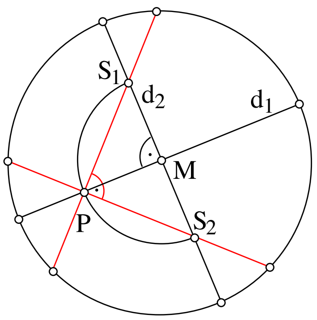
Lösung 030825:

Da gleichlange Sehnen gleichen Abstand vom Mittelpunkt M haben, müssen sie symmetrisch zu dem Durchmesser d durch P liegen.



Errichtet man in P auf PM die Senkrechte und halbiert die rechten Winkel, so erhält man die gesuchten Sehnen.

Alternative: Man errichtet den senkrechten Durchmesser d_2 auf d_1, welcher wiederum der Durchmesser durch P ist. Darauf werden im Abstand PM von M die Schnittpunkte S_1 und S_2 erzeugt, welche jeweils mit P verbunden auf den gesuchten Sehnen liegen.



Laut Konstruktion haben die Punkte S_1, P und S_2 den gleichen Abstand von M, liegen folglich auf einem Kreis um M, wobei S_1, M und S_2 auf einem Durchmesser dieses Kreises liegen. Folglich ist der Winkel $\sphericalangle S_1PS_2 = 90°$ nach dem Thalessatz.

Ferner gilt $PS_1 = PS_2$, da $PM \perp S_1S_2$. Die gesuchten Sehnen sind eine Vergrößerung der Strecken PS_1 und PS_2 um denselben Faktor (kleiner Kreis zu großem Kreis) und bleiben daher in ihrem Verhältnis zueinander identisch, also gleich groß

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Quellenverzeichnis

(15) "a+b = b+a" - Heft 66, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 8 - Dokumentation I.-XVIII. Olympiade (1961-1979), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1979.