3. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1963/1964

Aufgaben und Lösungen

3. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030731:

Peter stellt um 7.00 Uhr seine Armbanduhr nach der Zeitansage im Radio. Um 15.00 Uhr stellt er fest, daß seine Uhr in diesen 8 Stunden insgesamt 12 Minuten nachgegangen ist. Er möchte um Punkt 18.00 Uhr seinen Freund treffen.

Wie muß er seine Uhr um 15.00 Uhr stellen, damit sie um 18.00 Uhr die genaue Zeit anzeigt?

Aufgabe 030732:

a) Nenne alle Primfaktoren der Zahl 111 111 !

b) Gib noch 10 weitere Teiler dieser Zahl an!

Aufgabe 030733:

Eine Zahl $30{*}0{*}03$ soll durch 13 teilbar sein. Dabei sind die $*$ jeweils durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen. (Für beide Sterne muß nicht unbedingt die gleiche Ziffer gesetzt werden.)

Gib sämtliche Zahlen an, die die geforderte Eigenschaft haben!

Aufgabe 030734:

Zeichne ein beliebiges konvexes Fünfeck und seine sämtlichen Diagonalen!

Wieviel konvexe Vierecke sind in der Figur enthalten? Gib genau an, wie du diese Anzahl ermittelt hast!

Aufgabe 030735:

Zeichne ein Parallelogramm und eine außerhalb des Parallelogramms liegende Gerade, die zu einer der Diagonalen des Parallelogramms parallel ist! Verlängere die Seiten des Parallelogramms so, daß sie die Gerade schneiden!

Beweise, daß die beiden von den Verlängerungen je zweier Parallelseiten auf der Geraden begrenzten Abschnitte gleich groß sind!

Aufgabe 030736:

Gegeben seien die parallelen Seiten $a = 8$ cm und $c = 4$ cm eines Trapezes sowie seine Diagonalen $e = 8$ cm und $f = 6$ cm.

a) Konstruiere dieses Trapez!

b) Begründe die Konstruktion!

3. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 030731:

Auf 8 Stunden geht Peters Uhr 12 Minuten nach. Damit geht seine Uhr in einer Stunde $1,5$ Minuten nach, und in 3 Stunden $4,5$ Minuten. Also muss Peter um 15.00 Uhr seine Uhr auf 15.04 Uhr und 30 Sekunden stellen.

Anmerkung: Die Tatsache, daß die Uhr auch während der vorgestellten 4,5 Minuten etwas nachgeht, bleibt unberücksichtigt.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 030732:

a) Es gilt:

$$\begin{aligned} 111\,111 : 3 &= 37\,037 \\ 37\,037 : 7 &= 5291 \\ 5291 : 11 &= 481 \\ 481 : 13 &= 37 \end{aligned}$$

Die Primfaktoren der Zahl 111 111 lauten 3, 7, 11, 13 und 37.

b) Weitere Teiler sind

$$\begin{array}{lllll} 21\ (3\cdot 7) & 33\ (3\cdot 11) & 39\ (3\cdot 13) & 111\ (3\cdot 37) & 77\ (7\cdot 11) \\ 91\ (7\cdot 13) & 259\ (7\cdot 37) & 143\ (11\cdot 13) & 407\ (11\cdot 37) & 231\ (13\cdot 37). \end{array}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 030733:

Die Zahl $30{*}0{*}03 = 3\,000\,003 + 10\,000\cdot x + 100\cdot y$ ist genau durch 13 teilbar mit den Ziffern x und y, wenn $6+3\cdot x+9\cdot y$ durch 13 teilbar ist, denn es gilt $3\,000\,003+10\,000\cdot x+100\cdot y = 13\cdot(230\,769+769\cdot x+7\cdot y)+6+3\cdot x+9\cdot y$.

Durch systematisches Testen von $3\cdot(2+3\cdot y+x)$ auf Teilbarkeit durch 13 findet man für (x,y) schnell die Lösungen $(8,1)$, $(5,2)$, $(2,3)$, $(9,5)$, $(6,6)$, $(3,7)$ und $(0,8)$.

Somit erfüllen die folgenden Zahlen die geforderten Eigenschaften:

$$3\,000\,803 \quad 3\,020\,303 \quad 3\,030\,703 \quad 3\,050\,203 \quad 3\,060\,603 \quad 3\,080\,103 \quad 3\,090\,503.$$

Anmerkung: Die obige Angabe der vereinfachten Lösung durch Nutzung der Teilbarkeitsregel für die 13 ist nicht verlangt. Stattdessen kann auch nur durch systematisches Probieren nach der Lösung gesucht werden.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 030734:
Es gibt

- 5 Vierecke, die aus je 3 Fünfeckseiten und einer Diagonalen,
- 5 Vierecke, die aus je 2 Fünfeckseiten und 2 Diagonalen und
- 5 Vierecke, die aus je einer Fünfeckseite und 3 Diagonalen

gebildet werden, insgesamt also 15 Vierecke.

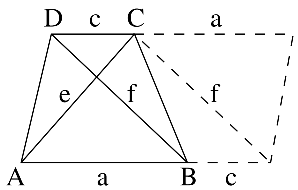
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 030735:
Die beiden Abschnitte sind zur selben Diagonalen parallel und als Parallelogrammseiten auch genau so lang wie diese Diagonalen, also sind sie auch untereinander gleich lang.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 030736:

a)



b) Man denke sich an das Trapez ein kongruentes Trapez so angefügt, daß beide zusammen ein Parallelogramm mit $(a + c)$ als Parallelseiten bilden. Es läßt sich dann aus $(a + c)$, e und f ein Teildreieck konstruieren.

Die Konstruktion des vierten Trapezpunktes läßt sich nun mit Hilfe einer Diagonalen und auf einer Trapezseite durchführen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.