3. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1963/1964

Aufgaben und Lösungen

3. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030711:

Ein rechteckiges Kartoffelfeld ist 250 m breit und 315 m lang. Der Reihenabstand in der Breite beträgt 62,5 cm. Auf beiden Seiten bleibt ein halber Reihenabstand frei. Der Staudenabstand in der Länge ist 35 cm. Auch hier bleibt beiderseits ein halber Staudenabstand frei. Um den Gesamtertrag des Feldes annähernd zu ermitteln, wird eine Diagonalprobe entnommen, d.h., es werden 100 von den auf einer Diagonalen liegenden Stauden gerodet. Dabei erbrachten diese Stauden 65,4 kg Kartoffeln.

Wie hoch ist voraussichtlich der Gesamtertrag?

Aufgabe 030712:

Bei der Friedensfahrt 1963 wurde zwischen Bautzen und Dresden (57 km) ein Einzelzeitfahren ausgetragen. Die Fahrer starteten dabei in Abständen von 1 Minute. Unmittelbar vor dem späteren Gesamtsieger Klaus Ampler (DDR) startete sein härtester Gegner Vyncke (Belgien). Während Ampler je Stunde durchschnittlich 42 km zurücklegte, erreichte Vyncke einen „Schnitt“ von 40 km je Stunde.

In welcher Zeit und nach wieviel Kilometern hätte Ampler den belgischen Fahrer eingeholt, wenn beide mit konstanter Geschwindigkeit gefahren wären? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 030713:

Wie kann man ohne Ausführung der angegebenen Rechenoperationen feststellen, ob die Zahl

$$\frac{378 \cdot 436 - 56}{378 + 436 \cdot 377}$$

größer oder kleiner als 1 ist?

Aufgabe 030714:

Von dem Mittelpunkt eines Rhombus werden die Lote auf die Seiten gefällt.

a) Beweise, daß die Fußpunkte der Lote auf den Ecken eines Rechtecks liegen!

b) In welchem Fall liegen sie auf den Ecken eines Quadrats? (Begründung!)

Aufgabe 030715:

Mit wieviel Nullen endet das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 40? (Begründung!)

Aufgabe 030716:

a) Es ist die kleinste natürliche Zahl zu finden, die bei der Division durch 2, 3, 4, 5, und 6 jeweils den Rest 1 läßt, aber durch 7 teilbar ist.

b) Nenne zwei weitere Zahlen mit dieser Eigenschaft und gib an, wie man beliebig viele solche Zahlen bekommen kann!

3. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 030711:

Es gibt 400 Reihen zu je 900 Stauden. Die 360 000 Stauden ergeben einen voraussichtlichen Gesamtertrag von 235 t Kartoffeln.

Aufgeschrieben von Steffen Weber – Quelle: (14)

Lösung 030712:

Ampler legt in jeder Stunde durchschnittlich 2 km mehr zurück als Vyncke. Dieser hätte $\frac{2}{3}$ km Vorsprung, also wäre er nach 20 min von Ampler eingeholt worden. In dieser Zeit hätte Ampler 14 km zurückgelegt.

Aufgeschrieben von Steffen Weber – Quelle: (14)

Lösung 030713:

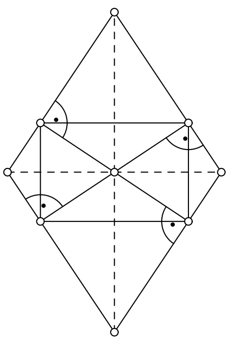
Es gilt

$$\frac{378\cdot 436-56}{378+436\cdot 377}=\frac{377\cdot 436+436-56}{436\cdot 377+378}=\frac{377\cdot 436+380}{377\cdot 436+378}.$$

Da der Zähler größer als der Nenner ist, ist die Zahl größer als 1.

Aufgeschrieben von Steffen Weber – Quelle: (14)

Lösung 030714:



a) *Beweis:* Im Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und halbieren einander. Außerdem sind alle Seiten gleich lang. Demzufolge sind die vier Dreiecke, in die ein Rhombus durch seine Diagonalen geteilt wird, kongruent. Daraus folgt, dass die vier Lote, die gleichzeitig die Höhe je eines der vier Dreiecke sind, gleich lang sind. Weiterhin liegen je zwei Lote auf einer Geraden. Damit sind die Diagonalen des Lotfußpunktvierecks gleich lang und halbieren einander; es ist also ein Rechteck. □

b) Wenn das Rhombus selbst ein Quadrat ist, bilden je zwei benachbarte Lote rechte Winkel. Ein Rechteck, in dem die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, ist ein Quadrat.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 030715:

Das Produkt enthält die Faktoren 5, 10, 15, 20, 30, 35 und 40, sowie den Faktor 25, in denen insgesamt neunmal der Faktor 5 vorkommt. In allen übrigen Faktoren tritt der Faktor 5 nicht auf. Da die Anzahl der

Endnullen von der Anzahl der Faktoren 2 und 5 abhängt und im vorliegenden Fall der Faktor mindestens neunmal auftritt, hat das Produkt genau 9 Endnullen.

Aufgeschrieben von Steffen Weber – Quelle: (14)

Lösung 030716:

a) Das kleinste gemeinsame Vielfache von 2, 3, 4, 5, und 6 ist 60. Die Zahlen 1, 61, 121, 181, ... lassen also bei der Division durch 2, 3, 4, 5, und 6 jeweils den Rest 1. Durch Probieren findet man, dass 301 die kleinste dieser Zahlen ist, die sich durch 7 teilen lässt.

b) Weitere Zahlen sind z. B. 721 und 1 141. Durch Addition von 420 zu einer derartigen Zahl erhält man stets eine weitere Zahl mit der gewünschten Eigenschaft.

Aufgeschrieben von Steffen Weber – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.