3. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Saison 1963/1964

Aufgaben und Lösungen

3. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030611:

Für kulturelle, soziale und gesundheitliche Zwecke gab unsere Regierung im Jahre 1958 rund 15 Milliarden DM aus. Im Jahre 1962 war die entsprechende Summe um ein Drittel höher als 1958.

a) Wieviel DM wurden in der DDR im Jahre 1962 für die genannten Zwecke ausgegeben?

b) Wieviel DM waren das in beiden Fällen je Kopf unserer Bevölkerung, wenn man jeweils eine Einwohnerzahl von rund 17 Millionen annimmt?

Aufgabe 030612:

Eine Pioniergruppe fuhr um 16.00 Uhr mit einem Autobus aus der Stadt in ein Ferienlager. Als sie neun Zehntel des Weges zurückgelegt hatten, mußten die Pioniere 2 km vor dem Lager aussteigen, weil der Bus den Waldweg, der zum Lager führte, nicht mehr befahren konnte. Für den Rest des Weges benötigten sie eine halbe Stunde und trafen um 17.00 Uhr im Lager ein.

Mit welcher Geschwindigkeit fuhr der Bus? (Wieviel Kilometer legte er in einer Stunde zurück?)

Aufgabe 030613:

Gegeben seien drei beliebige, aber aufeinanderfolgende zweistellige natürliche Zahlen.

a) Zeige, daß unabhängig von der Wahl dieser Zahlen niemals alle drei Zahlen zugleich Primzahlen sein können!

b) Nenne alle Primfaktoren, die unabhängig von der Wahl dieser Zahlen in mindestens einer von ihnen enthalten sein müssen!

Aufgabe 030614:

Peter, ein junger Mathematiker, sagt zu seinem Vater:

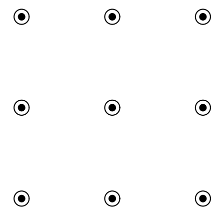
„Ich weiß ein Kunststück. Jeder von uns beiden hat 30 Streichhölzer zur Verfügung und nimmt einige davon in die Hand. Du sagst mir, ob die Anzahl der Streichhölzer, die du in die Hand genommen hast, gerade oder ungerade ist. Ich werde dir dann, ohne nachzuzählen, sagen, ob die Gesamtzahl der übriggebliebenen Streichhölzer gerade oder ungerade ist.“

Wieso weiß Peter das?

Aufgabe 030615:

a) Zeichne 9 Punkte so, wie es die Abbildung zeigt. Lege durch diese Punkte acht verschiedene Geraden so, daß auf jeder dieser Geraden drei Punkte liegen! Fertige eine Zeichnung an!

b) Es sollen nun 2 von diesen 9 Punkten so verschoben werden, daß man genau zehn verschiedene Geraden zeichnen kann, wobei wieder auf jeder dieser Geraden drei Punkte liegen sollen. Fertige auch dazu eine Zeichnung an!



Aufgabe 030616:

Gegeben seien neun Quadrate mit den Seitenlängen

$a = 36$ mm, $d = 20$ mm, $g = 14$ mm,
$b = 30$ mm, $e = 18$ mm, $h = 8$ mm,
$c = 28$ mm, $f = 16$ mm, $i = 2$ mm.

Füge diese Quadrate so zusammen, daß sie ein Rechteck bilden! Fertige dazu eine Zeichnung an!

3. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 030611:

a) Im Jahr 1962 wurden rund 20 Milliarden DM für kulturelle, soziale und gesundheitliche Zwecke ausgegeben.

b) Im Jahr 1958 waren es $\frac{15\,000}{17}$ DM $\approx$ 882 DM, also wurden rund 900 DM ausgegeben. Im Jahr 1962 waren es dagegen 1176 DM, das sind rund 1200 DM.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 030612:
Der Bus hat $\frac{9}{10}$ der Strecke in einer halben Stunde zurückgelegt. Da $\frac{1}{10}$ des Weges 2 km beträgt, legte der Bus somit 18 km in einer halben Stunde zurück, d. h. er fuhr 36 km in einer Stunde.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 030613:

a) Da in der Folge der natürlichen Zahlen jede zweite Zahl gerade ist, muß bei den drei Zahlen mindestens eine durch 2 teilbar sein. Diese zweistellige Zahl ist somit keine Primzahl.

b) Da außerdem bei drei aufeinanderfolgenden Zahlen stets genau eine Zahl durch 3 teilbar ist, kommen die Zahlen 2 und 3 als Primfaktoren in mindestens einer dieser Zahlen vor.

   Anmerkung: Die Primfaktoren 2 und 3 müssen aber nicht zwangsläufig in derselben Zahl vorkommen, wie bspw. bei 15, 16, 17 - hier kommt der Primfaktor 2 in 16 aber 3 in 15 vor.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 030614:
Fallunterscheidung:

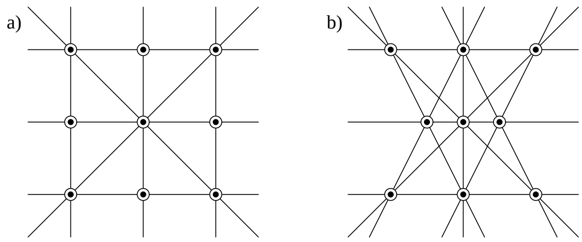
(1) Wenn Peter eine gerade Anzahl Streichhölzer in die Hand nimmt, bleibt bei ihm eine gerade Anzahl übrig. Sagt der Vater: „gerade“, so bleibt bei ihm ebenfalls eine gerade Anzahl übrig. Die Anzahl der übriggebliebenen Hölzer ist (als Summe zweier gerader Zahlen) gerade. Sagt der Vater aber: „ungerade“, so verbleibt eine ungerade Anzahl und die Anzahl aller übriggebliebenen Streichhölzer ist (als Summe aus einer geraden und einer ungeraden Zahl) ungerade. Peter sagt also dasselbe wie der Vater.

(2) Wenn Peter eine ungerade Anzahl Streichhölzer in die Hand nimmt, gilt: sagt der Vater: „gerade“, so ist die Anzahl aller übriggebliebener Hölzer ungerade, sonst ist die Anzahl der Hölzer gerade. Peter muß hier also das Gegenteil des Vaters sagen.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 030615:

Die gesuchten Geraden sind nachfolgend abgebildet:



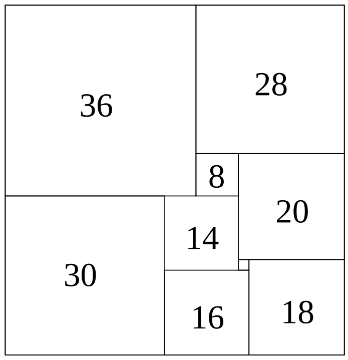
Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 030616:

Ein Weg zur Vereinfachung des Probierens ist folgender: man überlege sich, wieviel Fläche von allen Quadraten insgesamt bedeckt wird. Dann stelle man anhand der Quadratgrößen weitere Überlegungen an und finde ein Rechteck, in das die Quadrate passen müßten. Dann versuche man, durch Probieren die Lösung zu finden.

Das neue Rechteck hat einen Flächeninhalt von

$$\begin{aligned} A &= (2^2+8^2+14^2+16^2+18^2+20^2+28^2+30^2+36^2)\text{mm}^2 \\ &= 4224\text{mm}^2 \\ &= 2^7\cdot 3\cdot 11\text{mm}^2 \\ &= 66\cdot 64\text{mm}^2 \end{aligned}$$



Die Überlegung, wie es zur Aufteilung $66\cdot 64\text{mm}^2$ kommt, ist folgende: das Rechteck habe ohne der Beschränkung der Allgemeinheit eine längere oder gleich lange Höhe als Breite. Dann muß die Breite mindestens 36 mm betragen, da ein Quadrat dieser Länge und Breite enthalten sein soll.

Der nächstgrößere natürliche Teiler, den 4224 hat, ist 44. Daher müßte neben dem 36er Quadrat eine Fläche von einer Breite von 6 mm bedeckt sein. Mit den gegebenen Flächen ist dies nicht möglich.

Der nächstgrößere natürliche Teiler, den 4224 hat, ist 48. Daher müßte neben dem 36er Quadrat eine Fläche von einer Breite von 10 mm bedeckt sein. Dies ginge durch Nebeneinanderlegen vom 2er und 8er Quadrat. Dies würde aber nicht über die gesamte Höhe reichen.

Der nächstgrößere natürliche Teiler, den 4224 hat, ist 64. Damit sind wir bei o.g. Höhe-Seiten-Aufteilung des entstehenden Rechtecks. Eine andere Möglichkeit gibt es nicht (es sei denn, man vertauscht Höhe und Breite). Es ist also ein Rechteck aus den Quadraten lückenlos zu belegen, das die Abmessungen $64\text{ mm}\cdot 66\text{ mm}$ hat.

Schnell wird man feststellen, daß es günstig ist, das größte Quadrat in eine Ecke zu legen und daneben die beiden nächstgrößeren Quadrate anzulegen (in jeweils anderen Richtungen). Man erhält dabei schon die endgültige Höhe und Breite des Rechtecks. Mit ein wenig Probieren kommt man dann zu einem Ergebnis, das dem angegebenen bis auf Spiegelung und Drehung gleichen muß.

Anmerkung: Zur Lösung der Aufgabe genügt die Angabe einer gültigen Bedeckung des Rechtecks.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel