2. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1962/1963

Aufgaben und Lösungen

2. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 021231:
Für welche Werte von x gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \geq 1\,?$$

Aufgabe 021232:
Konstruieren Sie ein (konvexes) Viereck aus seinen Diagonalen, dem Winkel zwischen ihnen und zwei Seiten!

Begründen Sie die Konstruktion und diskutieren Sie die verschiedenen Möglichkeiten!

Aufgabe 021233:
Beweisen Sie folgende Behauptung!

Wenn eine positive ganze Zahl durch 99 teilbar ist, dann ist die Summe ihrer Ziffern nicht kleiner als 18.

Aufgabe 021234:
Geben Sie (für alle positiven Winkel x) für

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \geq \frac{8}{3}$$

alle Lösungen an!

Aufgabe 021235:
Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ und auf ihr ein beliebiger Punkt M.

Man konstruiere über derselben Seite der Strecke $\overline{AB}$ die Quadrate $AMDE$ und $MBGH$! Die Mittelpunkte der beiden Quadrate seien R und S.

Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken $\overline{RS}$?

Aufgabe 021236:
Gegeben sei ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ mit $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'} \parallel \overline{DD'}$. Der Punkt X durchläuft mit konstanter Geschwindigkeit den Umfang des Quadrats $ABCD$ in dieser Reihenfolge, der Punkt Y durchläuft mit derselben Geschwindigkeit den Umfang des Quadrats $A'D'C'B'$ in dieser Reihenfolge. Beide Punkte beginnen ihre Bewegungen im gleichen Augenblick von den Punkten A und A' aus.

Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Mittelpunkte Z der Strecken $\overline{XY}$!

2. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 021231:

Als erstes ist festzuhalten, dass der Wertebereich von x durch die Formel bereits wie folgt eingeschränkt ist: $-1 < x < 1$. Nun sucht man die Grenzstellen der Ungleichung, d.h. man berechnet zunächst:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1\\
\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}} &= 1\\
\frac{1-x+1+x-2\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} &= 1\\
\frac{2-2\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} &= 1\\
2-2\sqrt{1-x^2} &= 1-x^2\\
0 &= 1-x^2-2+2\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

Jetzt wird substituiert mit $z = \sqrt{1-x^2}$.

$$\begin{aligned}
0 &= z^2+2z-2\\
z_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Über die Substitution kann x wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
z &= \sqrt{1-x^2}\\
z^2 &= 1-x^2\\
x^2 &= 1-z^2\\
x &= \sqrt{1-z^2}
\end{aligned}$$

Für $z_2 = -1-\sqrt{3}$ lässt sich kein x berechnen. Für $z_1 = -1+\sqrt{3}$ ergibt sich $x \approx \pm 0{,}6813$. Um zu klären, wo jetzt tatsächlich eine Grenze liegt (durch das Quadrieren können Scheinlösungen entstehen) und wie sich die Kurve verhält, setzt man Werte aus jedem Intervall in die Gleichung ein.

$x = -0{,}7$:	$1,059 \geq 1$ (w.A.)
$x = 0$:	$0 \geq 1$ (f.A.)
$x = 0{,}7$:	$-1,059 \geq 1$ (f.A.)

Damit gilt die Gleichung $\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \geq 1$ für $-1 < x \leq -0{,}6813$.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 021232:

Grundsätzlich sind hier die beiden Fälle zu unterscheiden:

I. Die beiden gegebenen Seiten des Vierecks grenzen aneinander.

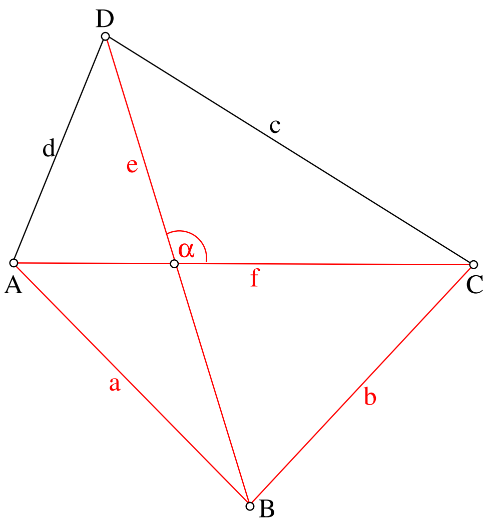
II. Die beiden gegebenen Seiten liegen sich im Viereck gegenüber.

Alle weiteren Fälle lassen sich auf diese beiden zurückführen. Seien also a und b die gegebenen Seiten und e und f die gegebenen Diagonalen sowie α der gegebene Winkel zwischen den Diagonalen.

Wenn nun in der folgenden Beschreibung die Lage von α angegeben ist, so müssen die Konstruktionsbeschreibungen ebenfalls für den Gegenwinkel $\beta = 180° - \alpha$ gelten, da nicht angegeben ist, welcher Winkel der Schnittwinkel zwischen e und f sei.

Ebenso müssen e und f gedanklich austauschbar sein genau so wie a und b.

I. Die beiden gegebenen Seiten des Vierecks grenzen aneinander.



Die Konstruktion geschieht wie folgt:

a) Konstruktion des Dreiecks ABC aus a, b, f.

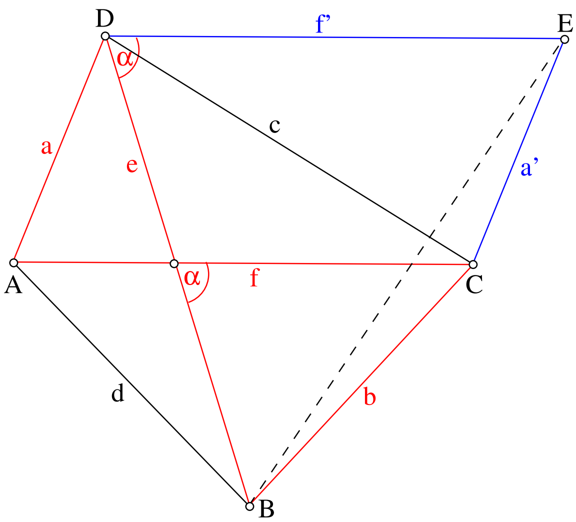
b) Konstruktion des Winkels α an f in einem beliebigen Punkt, es entsteht eine Gerade $e*$.

c) Parallelverschiebung von $e*$ so, daß die Gerade durch B verläuft, es entsteht eine Gerade $e**$.

d) Abtragen der Strecke e in B auf der Geraden $e**$ so, daß der entstehende Punkt D in der bzgl. AC anderen Halbebene als B liegt.

Das Viereck $ABCD$ ist das gesuchte Viereck. Wie bereits angemerkt, müssen alle Fälle, die durch Vertauschen von a und b sowie e und f sowie α und sein Nebenwinkel betrachtet werden.

II. Die beiden gegebenen Seiten liegen sich im Viereck gegenüber.



Die Konstruktion geschieht wie folgt:

a) Konstruktion eines Dreiecks BED aus $\overline{BD} = e$, $\overline{DE} = f$ und dem Winkel α zwischen den beiden Seiten.

b) Konstruktion des Dreiecks BCE aus $\overline{BC} = b$, $\overline{CE} = a$ und der vorhin konstruierten Strecke $\overline{BE}$.

c) Wie im 1. Fall wird nun auf e der Winkel α abgetragen und die entstehende Gerade so parallel verschoben, daß sie durch C geht. Auf der neu entstandenen Gerade wird f abgetragen, es entsteht A

Das Viereck $ABCD$ ist das gesuchte Viereck. Wie bereits angemerkt, müssen alle Fälle, die durch Vertauschen von a und b sowie e und f sowie α und sein Nebenwinkel betrachtet werden.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 021233:

Die Zahl z lässt sich im dekadischen System folgendermaßen darstellen:

$$z = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0 10^0,$$

wobei $a_n, \dots, a_0$ natürliche Zahlen kleiner als 10 sind und $a_n \neq 0$ ist.

Da z durch 9 teilbar ist, ist die Quersumme von z:

$$Q(z) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \text{ durch 9 teilbar.}$$

Da z durch 11 teilbar ist, ist die alternierende Quersumme von z:

$$Q^a(z) = (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} \pm \dots - a_1 + a_0 \text{ durch 11 teilbar.}$$

Setzt man die Summe der positiven Summanden von $Q^a(z)$ gleich a, also $a = a_0 + a_2 + \dots$ und die negative Summe der übrigen Summanden gleich b, also $b = a_1 + a_3 + \dots$, so gilt: $Q(z) = a + b = 9k$ und $Q^a(z) = a - b = 11m$, wobei a, b nichtnegative ganze Zahlen, k positive ganze Zahl und m eine ganze Zahl bedeuten.

Die Aufgabe ist gelöst, wenn $k \neq 1$ gezeigt wird.

Angenommen, es gelte $k = 1$, so folgt aus $a + b = 9$ und $a - b = 11m$:

$$a = \tfrac{1}{2}(9 + 11m) \text{ und } b = \tfrac{1}{2}(9 - 11m).$$

Da a nichtnegativ und ganzzahlig ist, folgt aus der Formel für a: $m \geq 1$. Da b ebenfalls nichtnegativ und ganzzahlig ist, folgt aus der Formel für b gleichzeitig $m \leq -1$. Diese beiden Bedingungen für m sind jedoch unvereinbar miteinander. Daher ist die Annahme $k = 1$ nicht richtig, und es ist $k \geq 2$, d. h., die Quersumme $Q(z)$ ist größer oder gleich 18. □

Aufgeschrieben und gelöst von Burkhard Thiele

Lösung 021234:

1. Lösungsvariante: (Steffen Weber)

Da $\cos^2 x > 0$ und $\sin^2 x > 0$ gilt, folgt mit Additionstheoremen

$$\cos^2 x - \sin^2 x \geq \frac{2}{3}(2 \sin x \cos x)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) \geq \frac{2}{3} \sin^2(2x)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(2x) + \frac{3}{2}\cos(2x) + \frac{9}{16} \geq 1 + \frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos(2x) + \frac{3}{4}\right)^2 \geq \left(\frac{5}{4}\right)^2. \tag{1}$$

Wäre $\cos(2x) + \frac{3}{4} < 0$, so wäre $(\cos(2x) + \frac{3}{4})^2 \leq (-\frac{1}{4})^2 < (\frac{5}{4})^2$ wegen $\cos(2x) \geq -1$,also muss $\cos(2x) + \frac{3}{4} \geq 0$ gelten, d.h. Radizieren beider Seiten von (1) ist erlaubt und es gilt $\cos(2x) + \frac{3}{4} \geq \frac{5}{4}$ bzw. $\cos(2x) \geq \frac{1}{2}$.

Somit ist $2k\pi - \frac{\pi}{6} \leq 2x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$. Also erfüllen wegen $\sin^2 x \neq 0 \neq \cos^2 x$ alle positiven Winkel x (des Hauptwinkelbereiches) mit

$$0 < x \leq \frac{\pi}{12} \text{ oder } \frac{11\pi}{12} \leq x < \pi \text{ oder } \pi < x \leq \frac{13\pi}{12} \text{ oder } \frac{23\pi}{12} \leq x < 2\pi$$

die Gleichung.

2. Lösungsvariante: (Carsten Balleier)

Da $\sin^2 x > 0$ und $\cos^2 x > 0$ wegen der Formulierung der Ungleichung angenommen werden darf (Gleichheit ist nicht zulässig), kann die Ungleichung durch Multiplikation zu

$$\cos^2 x - \sin^2 x \geq \frac{8}{3} \sin^2 x \cos^2 x$$

umgeformt werden, was mittels Additionstheoremen gleichbedeutend ist mit

$$\cos 2x \geq \frac{2}{3} \sin^2 2x = \frac{2}{3} \left(1 - \cos^2 2x\right).$$

Substituiert man nun $z = \cos 2x$, reduziert sich das Problem auf die quadratische Ungleichung $2z^2 + 3z - 2 \geq 0$. Ihre Lösungsmenge ist $\{z \leq -2\} \cup \{z \geq 1/2\}$, wobei nur für $z \in [1/2, 1]$ die Rücksubstitution möglich ist. Diese ergibt, dass

$$x \in (0, \pi/6] \cup [5\pi/6, \pi)$$

gelten muss; nur für diese x (und deren Wiederholung mit der Periode π) ist die gegebene Ungleichung erfüllt.

Aufgeschrieben und gelöst von S. Weber und C. Balleier

Lösung 021235:

Die Strecke AB wird so in ein zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem gelegt, so dass folgende Punkte folgende Koordinaten haben:

$$A(0,0),\ B(a,0),\ M(m,0),\ \text{mit } 0 \leq m \leq a.$$

Nach den Bedingungen der Aufgabenstellung haben die Punkte D, E, G und H dann die folgenden Koordinaten:

$$D(m,m),\ E(0,m),\ G(a,a-m),\ H(m,a-m).$$

Die Mittelpunkte R des Quadrates $MADE$ und S des Quadrates $MBGH$ haben somit die Koordinaten:

$$R\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right),\ S\left(\frac{a+m}{2}, \frac{a-m}{2}\right).$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes N der Strecke RS im zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem lauten demnach

$$N\left(\frac{a+2m}{4}, \frac{a}{4}\right).$$

Da der Punkt M auf der Strecke AB beliebig gewählt werden kann, d.h. es gilt $0 \leq m \leq a$, ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken RS eine zu AB parallele Strecke KL der Länge $\frac{a}{2}$ wobei deren Endpunkte K und L folgende Koordinaten haben:

$$K\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right),\ L\left(\frac{3a}{4}, \frac{a}{4}\right).$$

Aufgeschrieben und gelöst von Manfred Worel

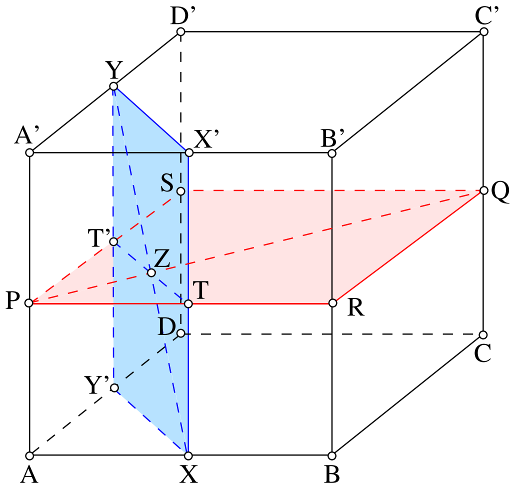
Lösung 021236:

Aufgrund der gegebenen Bedingungen ergibt sich die Lage des Punktes Y aus der von X folgendermaßen:

a) für $X \in AB$ liegt Y auf $A'D'$ so, daß $|AX| = |A'Y|$ ist,

b) für $X \in BC$ liegt Y auf $D'C'$ so, daß $|BX| = |D'Y|$ ist,

c) für $X \in CD$ liegt Y auf $C'B'$ so, daß $|CX| = |C'Y|$ ist,



d) für $X \in DA$ liegt Y auf $B'A'$ so, daß $|DX| = |B'Y|$ ist.

Zur Lösung der Aufgabe werden die folgenden beiden Sätze bewiesen:

Satz 1: Ist P der Mittelpunkt von AA' und Q der Mittelpunkt von CC', so liegt der Mittelpunkt Z von XY auf PQ.

Satz 2: Liegt Z auf PQ, so ist Z Mittelpunkt einer der Strecken XY.

Aus beiden Sätzen folgt, daß der zu ermittelnde geometrische Ort die Strecke PQ ist.

Beweis von Satz 1:

Wird zu einem fest gedachten Zeitpunkt der Bewegung der Würfel an der Achse g_{PQ} gespiegelt, so geht dieser in sich über, und zwar so, daß A, B, C, D und X in dieser Reihenfolge mit A', B', C', D', Y vertauscht werden. Daher liegt Z auf der Symmetrieachse g_{PQ}.

Weil jeder Würfel konvex ist, ist PQ die Menge der Punkte von g_{PQ}, die im Würfelkörper liegen. Da aus demselben Grund XY und damit Z im Würfelkörper liegen, gilt $Z \in PQ$. $\square$

Beweis von Satz 2:

Es sei ϵ_2 die auf g_{PQ} senkrecht stehende Ebene durch $Z \in PQ$. Dann liegen P und Q nicht auf derselben Seite von ϵ_2. Da jede der Kanten AA', BB', CC', DD' zu ϵ_2 parallel ist, liegen jeweils A und A', B und B', C und C', D und D' nicht auf verschiedenen Seiten von ϵ_2, während A und C bzw. A' und C' nicht auf derselben Seite von ϵ_2 liegen.

Die Ebene ϵ_2 enthält die Strecken BB' und DD' entweder beide - genau dann, wenn Z der Mittelpunkt von PQ ist - oder beide nicht. Folglich hat $\epsilon_2$mit jeder der Strecken AB, $A'B'$, AD, $A'D'$ oder mit jeder der Strecken BC, $B'C'$, CD, $C'D'$ einen Punkt gemeinsam. Diese Schnittpunkte vertauschen sich bei der im Beweis von Satz 1 genannten Spiegelung auf die dort beschriebene Weise.

Daher gibt es zu jedem Punkt $Z \in PQ$ ein Paar, im Falle $Z \neq P$, $Z \neq Q$ genau zwei Paare (X, Y) zusammengehöriger Punkte X, Y, für die Z Mittelpunkt von XY ist. $\square$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag