2. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Saison 1962/1963

Aufgaben und Lösungen

2. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 020921:
Bei dem Gruppenflug der sowjetischen Kosmonauten Andrijan Nikolajew und Pawel Popowitsch hatten die Raumschiffe Wostok III und Wostok IV zeitweilig einen Abstand von nur 6,5 km voneinander. Der Einfachheit halber sei angenommen, daß sie genau hintereinander flogen. Dabei legten sie eine Erdumrundung (41 000 km) in rund 88 Minuten zurück.

Welchen Abstand müßten zwei mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h auf der Autobahn fahrende Autos haben, wenn ihr Zeitabstand der gleiche wie bei den Raumschiffen wäre?

Aufgabe 020922:
Ein Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h. Es wird gebremst.

a) In welcher Zeit kommt es zum Stehen, wenn durch die Bremsung seine Geschwindigkeit in jeder Sekunde um 5 m/s abnimmt?

b) Welchen Bremsweg legt es in dieser Zeit zurück?

Aufgabe 020923:
Peter macht mit Jürgen eine Wette. Er will nach einem 10 000 Schritte entfernten Ort hin- und zurückgehen, bevor Jürgen 150 Murmeln in ein Körbchen gesammelt hat. Die Murmeln sollen dabei in einer Reihe mit je einem Schritt Abstand voneinander liegen und einzeln in das Körbchen gebracht werden, das in einem Schritt Abstand vor der ersten Murmel steht. Beide Jungen sollen genau gleich schnell gehen.

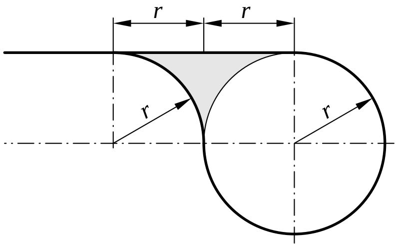
Wer gewinnt die Wette? Begründen Sie die Behauptung!

Aufgabe 020924:
Gegeben sei ein Kreis. In diesem Kreis seien ein Trapez und ein Dreieck so einbeschrieben, daß eine Seite des Trapezes ein Durchmesser des Kreises ist und die Seiten des Dreiecks parallel zu den Trapezseiten verlaufen.

Es ist zu beweisen, daß Trapez und Dreieck in diesem Falle gleichen Flächeninhalt haben!

Aufgabe 020925:
Zeichnen Sie eine Gerade g und auf derselben Seite von g zwei Punkte A und B, die verschiedenen Abstand von g haben und deren Verbindungsstrecke verlängert die Gerade g nicht unter einem rechten Winkel schneidet! Konstruieren Sie auf g einen Punkt P, für den der Winkel zwischen AP und g gleich dem Winkel zwischen BP und g ist! Begründen Sie die Konstruktion!

Aufgabe 020926:



An der Endstation einer Straßenbahnlinie soll eine Gleisschleife gebaut werden. Sie wird so angelegt, daß die gerade Strecke in einen Kreis mündet, dessen letztes Viertel als Gegenkurve zur geraden Strecke zurückführt.

a) Berechnen Sie die Gleislänge von Weichenspitze bis wieder zur Weichenspitze!

b) Wie groß ist das Flächenstück, das von der Schleife eingeschlossen wird?

2. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 020921:

Die beiden Raumschiffe haben eine Geschwindigkeit von

$$v = \frac{41\,000\text{ km}}{88\text{ min}} \cdot 60\text{ min/h} \approx 27\,955\text{ km/h},$$

was einen Zeitabstand von

$$t_\Delta = \frac{6,5\text{ km}}{27\,955\text{ km/h}} \approx 0,000\,232\,5\text{ h}$$

ergibt. Bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h entspricht das einer Entfernung von

$$0,000\,232\,5\text{ h} \cdot 100\text{ km/h} = 0,023\,25\text{ km} = 23,25\text{ m}.$$

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 020922:

a) Aus der Formel $v = a \cdot t$ erhält man

$$t = \frac{v}{a} = \frac{\frac{100}{3,6}\text{ m/s}}{5\text{ m/s}^2} = \frac{20}{3,6}\text{ s} \approx 5,56\text{ s}.$$

b) Das Auto legt in dieser Zeit einen Weg von

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 = 2,5\text{ m/s}^2 \cdot (5,56\text{ s})^2 \approx 77,3\text{ m}$$

zurück.

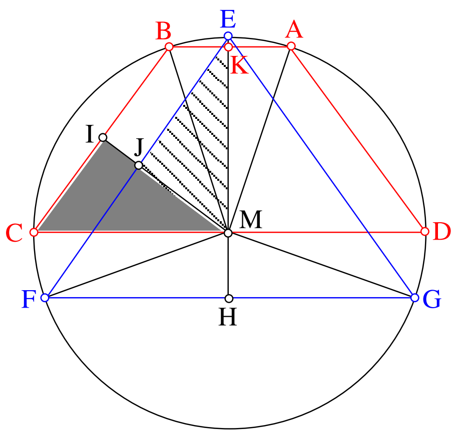
Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 020923:

Peter gewinnt. Er muss $2 \cdot 10\,000 = 20\,000$ Schritte gehen. Jürgen dagegen muss $2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 150) = 2 \cdot 75 \cdot 150 = 22\,650$ Schritte gehen.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 020924:



J sei der Höhenfußpunkt im Dreieck ΔMFE von Punkt M auf der Seite EF. Dann gilt $\Delta MFJ \simeq \Delta MEJ$ nach SSW:

(1) $\overline{MF} = \overline{ME} = r$

(2) $\overline{MJ}$ in beiden Dreiecken enthalten

(3) $\sphericalangle MJF = \sphericalangle MJE = 90°$

Analog sei I der Höhenfußpunkt im Dreieck ΔMBC von Punkt M auf der Seite BC. Die Punkte M, I und J liegen auf einer Geraden, da die Winkel $\sphericalangle MJF$ und $\sphericalangle MIC$ gleich groß und die Strecken $\overline{EF}||\overline{BC}$ sind.

Sei Winkel $\sphericalangle BCD := \alpha$. Dann gilt auch $\sphericalangle EFG = \alpha$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen). Nach Innenwinkelsatz im Dreieck ΔEFH gilt dann für Winkel $\sphericalangle FEH = 90° - \alpha$ und nach Innenwinkelsummensatz im Dreieck ΔMEJ: $\sphericalangle JME = \alpha$.

Demzufolge gilt $\Delta MEJ \simeq \Delta MCI$ nach WWS:

(1) $\overline{ME} = \overline{MC} = r$

(2) $\sphericalangle JME = \sphericalangle MCB = \alpha$

(3) $\sphericalangle MJE = \sphericalangle MIC = 90°$

Damit hat man sogar 4 kongruente Dreiecke:

$$\Delta FMJ \simeq \Delta MEJ \simeq \Delta MCI \simeq \Delta MBI$$

Nun bleibt zu zeigen, daß gilt: $\Delta FHM \simeq \Delta MBK$, wobei H und K die Höhenfußpunkte in den Dreiecken ΔFGM und ΔMAB wie in der Zeichnung ersichtlich sind.

Dazu betrachte man zuerst Winkel $\sphericalangle MFG = 180° - \sphericalangle FHM - \sphericalangle MFE - \sphericalangle FEM = 180° - 90° - 2 \cdot \sphericalangle MFE$, wobei $\sphericalangle MFE = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$ im Dreieck ΔJFM gilt. Damit ergibt sich $\sphericalangle MFG = 90° - 2 \cdot (90° - \alpha) = 2 \cdot \alpha - 90°$.

Als nächstes wird Winkel $\sphericalangle BMK$ betrachtet: $\sphericalangle BMK = 90° - \sphericalangle CMI - \sphericalangle CMI = 90° - 2 \cdot (180° - 90° - \alpha) = 2 \cdot \alpha - 90°$.

Beide Dreiecke ΔFHM und ΔMBK sind nach WWS kongruent:

(1) $\overline{MF} = \overline{MB} = r$

(2) $\sphericalangle MFG = \sphericalangle BMK = 2 \cdot \alpha - 90°$

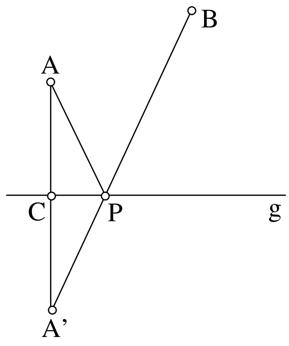
(3) $\sphericalangle MHF = \sphericalangle BKM = 90°$

Mithin ist eine Hälfte des Dreiecks aus den Teilflächen ΔFHM, ΔMFJ und ΔJME flächengleich zu einer Trapezhälfte, die aus den Teilflächen ΔMBK, ΔBMI und ΔCMI besteht. $\square$

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 020925:

Man spiegelt zuerst den Punkt A an der Geraden g und erhält den Punkt A'. Der Schnittpunkt von g mit $\overline{AA'}$ sei C. Der Schnittpunkt von g mit $\overline{A'B}$ sei P.



Dann sind die beiden Dreiecke ΔACP und $\Delta A'CP$ wegen SWS kongruent zueinander. Demnach ist $\sphericalangle A'PC = \sphericalangle CPA$. Außerdem ist auch $\sphericalangle A'PC$ genauso groß wie der Winkel zwischen g und $\overline{PB}$, weil es sich um Wechselwinkel handelt.

Der gefundene Punkt P erfüllt also die Anforderungen.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 020926:

a) Die Gleislänge ist $2r + 2\pi r$.

b) Das Flächenstück beinhaltet einen Kreis mit der Fläche πr^2 und die Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen $2r$ und r abzüglich der Fläche der beiden Viertelkreise. Als eingeschlossene Fläche erhält man $\pi r^2 + 2r^2 - \pi r^2/2 = 2r^2 + \pi r^2/2$.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka