2. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Saison 1962/1963

Aufgaben und Lösungen

2. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 020831:

Zinkblende ist ein Erz und enthält 65 Prozent Zink. Von dieser Zinkmenge gehen bei der Gewinnung noch 15 Prozent verloren.

Wieviel kg Zinkblende sind erforderlich, um 1 000 kg Zink zu gewinnen?

Aufgabe 020832:

Rechenvorteile erleichtern das Kopfrechnen. Zwei Zahlen von 11 bis 19 kann man z. B. folgendermaßen multiplizieren:

$18 \cdot 17 =?$	$18 + 7$	25
	Null anhängen	250
	$7 \cdot 8$ addieren	306

Weise die Richtigkeit dieses Rechenvorteils nach!

Aufgabe 020833:

Rainer, der zur Fußballmannschaft der Schule gehört, schafft Ordnung in dem Schrank für Fußballschuhe. Er weiß, daß einige Schuhe zum Schuhmacher gebracht worden sind.

Er stellt fest, daß die Schuhe verschiedene Größen aufweisen, nämlich 37, 38, 39 und 40.

Sechs Paare sind ordnungsgemäß zusammengebunden, das sind Schuhe jeder Größe. Die meisten dieser Paare sind von der Größe 38.

Von den außerdem vorhandenen fünf rechten Schuhen ist keiner von der Größe 38, die meisten sind von der Größe 39.

Die außerdem noch vorhandenen acht linken Schuhe gehören zu jeder Größe, am meisten ist die Größe 40, am wenigsten die Größe 37 vertreten.

a) Wieviel Fußballschuhe sind beim Schuhmacher?

b) Was für Fußballschuhe sind das?

Begründe deine Antwort!

Aufgabe 020834:

Es soll ein Drachenviereck konstruiert werden, in dem 2 gegenüberliegende Winkel je 100° betragen, das Verhältnis der ungleichen Seiten 2 : 3 ist und eine Diagonale 7 cm mißt.

Aufgabe 020835:

Beweise folgenden Satz:

Wenn man durch den einen Schnittpunkt zweier Kreise die beiden Durchmesser zieht, so liegen deren andere Endpunkte mit dem zweiten Schnittpunkt der Kreise in einer Geraden.

Aufgabe 020836:

a) Gegeben sind drei Geraden g_1, g_2 und g_3, von denen keine auf einer anderen senkrecht steht. Sie schneiden einander im Punkt S. Auf g_1 liegt ein weiterer Punkt A. Gesucht ist das Dreieck ABC, in dem die Höhen auf den Geraden liegen.

b) Untersuche sämtliche Fälle, bei denen 2 Geraden aufeinander senkrecht stehen und der Punkt A auf einer dieser Geraden oder auf der dritten liegt!

2. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 020831:

Die 1 000 kg Zink, die gewonnen werden sollen, sind 85% des Zinks, das in der Zinkblende enthalten ist, also sind 100% 1 176,5 kg. Dies wiederum ist 65% der Gesamtmenge an Zinkblende, die demzufolge 1 810 kg betragen muss.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 020832:

Man kann das Produkt darstellen als $(10 + a)(10 + b)$ mit $1 \leq a, b \leq 9$. Es ist daher gleich

$$100 + 10a + 10b + ab = 10\,(10 + a + b) + ab.$$

Die Summe aus 10 und den beiden Einerstellen entspricht im Beispiel $18 + 7$, die Multiplikation mit 10 der angehängten Null und das Produkt der Einer der $7 \cdot 8$.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 020833:

Schauen wir uns zuerst die Paare an. Von jeder Größe gibt es mindestens einen; und von der 38 mehr als von jeder anderen.

Gäbe es 2 von der 38, müsste es von einer anderen Größe auch 2 geben. Es dürfte eine andere Größe gar nicht vorhanden sein. Also muss die 38 dreimal, die anderen je einmal unter den Paaren vertreten sein.

Bei den rechten Schuhen geht man analog vor: es gibt nur drei Größen, insgesamt aber einen Schuh weniger als bei den Paaren. Rainer hat also 3 rechte 39-er und je einen 37-er und 40-er vor sich.

Bei den linken weiß man, dass es wenigstens einen Schuh der 37 gibt und dass die anderen häufiger (d.h. mind. 2-mal) vorkommen. Da es nur 8 linke gibt, ist die 40 dreimal, die 39 und 38 je zweimal und die 37 einmal vertreten.

Wenn man schaut, welche linken und rechten noch zu Paaren gebunden werden können, stellt man fest, dass 2 rechte 38-er, ein linker 39-er und 2 rechte 40-er beim Schuhmacher sein müssen.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 020834:

Die Konstruktion führt man in zwei wesentlichen Teilen durch.

(1) Man konstruiert ein Dreieck, welches der einen Hälfte des Drachenvierecks ähnlich ist.

Man zeichnet einen Winkel von 100° (der Scheitel sei A), auf dessen Schenkeln man zwei bzw. drei (beliebig wählbare) Einheiten abträgt. Die beiden Endpunkte (B' und D') verbindet man, die erhaltene Strecke e' entspricht der Diagonalen e von 7 cm.

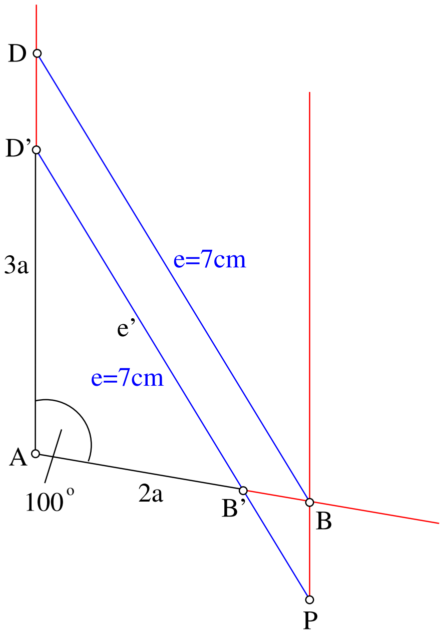
(2) Per Strahlensatzkonstruktion erzeugt man die richtige Größe.

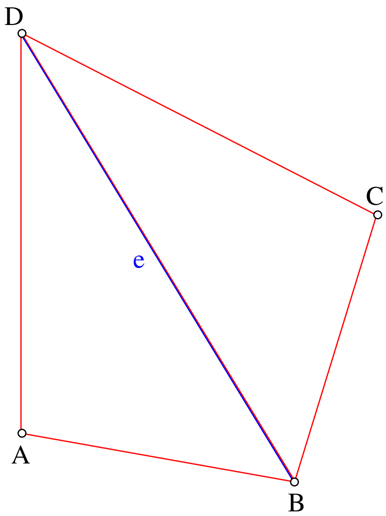
Auf der Geraden durch $D'B'$ wird Punkt P konstruiert, indem die Länge e von D' aus in Richtung B' abgetragen wird.

Nun wird eine Gerade durch P parallel zu AD' konstruiert, die die Gerade durch AB' in B schneidet.

Die Parallelverschiebung von $B'D'$ durch B erzeugt D als Schnittpunkt mit der Geraden durch AD'.

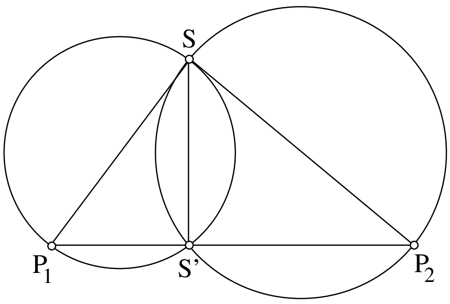
(3) Das Dreieck ABD wird an BD gespiegelt. Der Spiegelpunkt von A sei C. Es entsteht das Drachenviereck $ABCD$, welches den geforderten Bedingungen entspricht.





Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 020835:

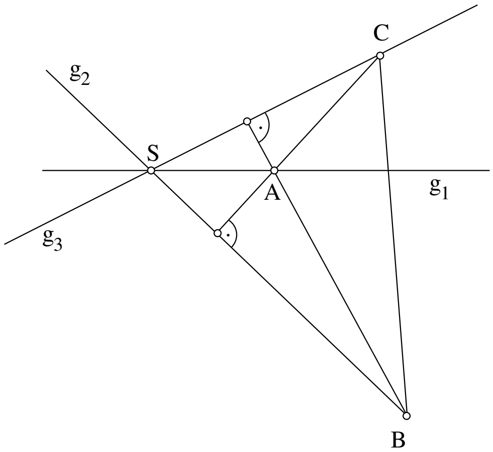


Beweis: Sei der erste Schnittpunkt S, der andere S' und heißen die anderen Endpunkte der Durchmesser P_1 und P_2.

Dann ist $\sphericalangle P_1S'S$ ein Peripheriewinkel über dem Durchmesser P_1S, nach Satz des Thales also ein rechter Winkel. Ebenso gilt $\sphericalangle P_2S'S = 90°$. Damit schließen P_1S' und P_2S' einen Winkel von 180° ein; mit anderen Worten: P_1, S' und P_2 liegen wie behauptet auf einer Geraden. $\square$

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 020836:



a) Man fällt die Lote von A auf g_2 und g_3. Diese verlängert man, so dass sie g_3 bzw. g_2 schneiden. Diese Schnittpunkte sind die anderen beiden Eckpunkte des Dreiecks.

b) Hier geht man ebenso vor. Falls A auf einer der beiden senkrecht zueinander stehenden Geraden liegt, ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck. Liegt A aber auf der dritten Geraden, entsteht überhaupt kein Dreieck.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Quellenverzeichnis

(15) "a+b = b+a" - Heft 66, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 8 - Dokumentation I.-XVIII. Olympiade (1961-1979), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1979.