1. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1961/1962

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 011241:

Bei 27 000 Düngungsversuchen mit Phosphordüngemitteln stellte man die folgenden mittleren Ernteerträge für Kartoffeln fest:

Düngergabe bezogen auf P_2O_5 (dt/ha)	Ernteertrag (dt/ha)
0,0	237
0,3	251
0,9	269

Die zwischen der Düngergabe x (in dt/ha) und dem Ernteertrag y (in dt/ha) bestehende Beziehung kann durch die folgende Relation angenähert wiedergegeben werden:

$$y = a - b \cdot 10^{-kx}$$

wobei a, b und k Konstanten sind.

a) Berechnen Sie mit Hilfe der oben angegebenen Werte diese Konstanten!

b) Berechnen Sie den Ernteertrag für eine Düngergabe von 0,6 dt/ha und 1,2 dt/ha!

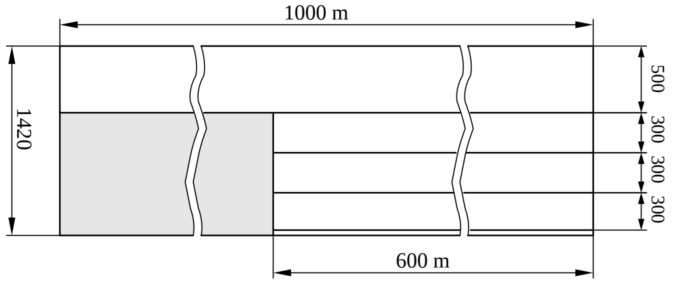
c) Stellen Sie die prozentuale Abweichung der errechneten Werte von den im Versuch ermittelten Werten 261 dt/ha bzw. 275 dt/ha fest!

Aufgabe 011242:

Es seien u, v und w beliebig gewählte positive Zahlen, kleiner als 1.

Man soll zeigen, daß unter den Zahlen $u(1-v)$, $v(1-w)$, $w(1-u)$ stets mindestens ein Wert nicht größer als $\frac{1}{4}$ vorkommt.

Aufgabe 011243:



Mit einer Rollenschere sollen aus Blechen von 1 420 mm Breite rechteckige Bleche, und zwar mit einer Breite von 500 mm und einer Gesamtlänge von 1 000 m sowie mit einer Breite von 300 mm und einer Gesamtlänge von 1 800 m geschnitten werden. Bisher wurde nach der beigefügten Zeichnung geschnitten, in der die graue Fläche den Abfall darstellt, der ziemlich groß ist.

Eine sozialistische Brigade macht den Vorschlag, so zu schneiden, daß der Abfall erheblich geringer wird.

a) Wieviel Prozent beträgt der Abfall, wenn wie bisher geschnitten wird?

b) Wie muß die Brigade schneiden, damit der Abfall möglichst gering wird, und welche Gesamtlänge der Ausgangsbleche ist in diesem Fall erforderlich?

c) Wieviel Prozent beträgt jetzt der Abfall?

Aufgabe 011244:

Gegeben sei ein konvexes ebenes Viereck.

Es ist zu beweisen, daß für den Quotienten q aus dem größten und dem kleinsten aller Abstände zweier beliebiger Eckpunkte voneinander stets gilt:

$$q \geq \sqrt{2}.$$

Aufgabe 011245:

Gegeben sind eine Ebene P und zwei feste Punkte A und B, die nicht in dieser Ebene liegen. Man bezeichnet mit A' und B' zwei Punkte der Ebene P und mit M und N die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$.

a) Bestimmen Sie den geometrischen Ort des Mittelpunktes der Strecke $\overline{MN}$, wenn sich die Punkte A' und B' willkürlich in der Ebene P bewegen!

b) In der Ebene P wird ein Kreis O betrachtet. Bestimmen Sie den geometrischen Ort L des Mittelpunktes der Strecke $\overline{MN}$, wenn die Punkte A' und B' sich auf dem Kreise O oder in dessen Innern befinden!

c) Wird A' fest auf dem Kreise O oder in dessen Innern angenommen und B' beweglich im Innern oder Äußern von O, so soll der geometrische Ort des Punktes B' bestimmt werden, so daß der oben bestimmte Ort L derselbe bleibt.

Anmerkung: Bei b) und c) sollen folgende Fälle betrachtet werden:

1. A' und B' sind verschieden,
2. A' und B' fallen zusammen.

1. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 011241:

a) Es gilt:

$$237 = a - b$$
$$251 = a - b \cdot 10^{-0,3k}$$
$$269 = a - b \cdot 10^{-0,9k}$$

Gleichung (1) kann man leicht nach a umstellen und in die anderen beiden Gleichungen einsetzten. Man erhält:

$$14 = b - b \cdot 10^{-0,3k}$$
$$32 = b - b \cdot 10^{-0,9k}$$

Dies kann man umstellen zu:

$$10^{-0,3k} = (b-14)/b$$
$$10^{-0,9k} = (b-32)/b = (10^{-0,3k})^3$$

Setzt man beide Gleichungen ineinander ein, erhält man:

$$((b-14)/b)^3 = (b-32)/b$$
$$(b^3 - 42b^2 + 588b - 2744)/b^3 = (b-32)/b$$
$$b^4 - 42b^3 + 588b^2 - 2744b = b^4 - 32b^3$$
$$0 = 10b^3 - 588b^2 + 2\,744b$$
$$0 = 10b \cdot (b^2 - 588/10 \cdot b + 2744/10)$$

Durch Anschauen der Ausgangsgleichungen kann man leicht sehen, dass die Lösung $b = 0$ entfällt. Damit gilt:

$$b_{1,2} = 294/10 \pm \sqrt{86436/100 - 2744/10}$$

$b_1 = 53,69$	$b_2 = 5,11$
$a_1 = 290,69$	$a_2 = 242,11$
$k_1 = 0,44$	Für diese Werte lässt sich kein k berechnen. Damit entfällt diese Lösung.

Die Konstanten haben damit folgende Werte: $b = 53,69$, $a = 290,69$ und $k = 0,44$.

b) $x = 0{,}6$ dt/ha $\quad\to\quad$ $y = 261{,}46$ dt/ha

$x = 1{,}2$ dt/ha $\quad\to\quad$ $y = 274{,}77$ dt/ha

c) $x = 261{,}46/261 = 1{,}0018$ $\Rightarrow$ Für den ersten Versuch gibt es eine prozentuale Abweichung von 0,18 %.

$x = 274{,}77/275 = 0{,}9992$ $\Rightarrow$ Für den zweiten Versuch gibt es eine prozentuale Abweichung von 0,08 %.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 011242:

Indirekter Beweis: Angenommen, keine der Zahlen $u(1-v)$, $v(1-w)$, $w(1-u)$ ist nicht größer als $\frac{1}{4}$, d. h., alle drei Zahlen sind größer als $\frac{1}{4}$. Deren Multiplikation liefert

$$uvw(1-u)(1-v)(1-w) > \frac{1}{64}. \tag{1}$$

Andererseits ist jedoch $u(1-u) = \frac{1}{4} - \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$; analoge Ungleichungen gelten für v und w. Multipliziert man diese drei Ungleichungen, zeigt sich, dass (1) nicht gilt. Somit war die obige Annahme falsch, und die Behauptung ist bewiesen. □

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

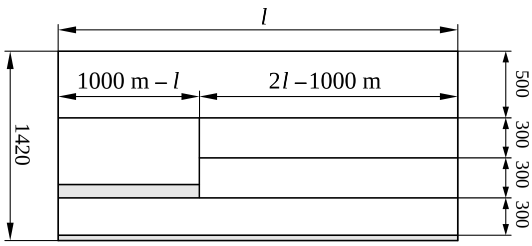
Lösung 011243:

a) Der bisherige Abfall besteht aus zwei rechteckigen Flächen, wobei die größere

$1000\text{ m} - 600\text{ m} = 400\text{ m}$ lang und
$1{,}42\text{ m} - 0{,}5\text{ m} = 0{,}92\text{ m}$ breit ist

und somit eine Fläche von 368 m^2 hat.

Die kleinere Fläche ist 600 m lang und 0,02 m breit, entsprechend 12 m^2.



Der Abfall beträgt also insgesamt 380 m^2, gemessen an der Gesamtfläche von 1420 m^2 sind das 26,8 %.

b) Da die Gesamtbreite vorgegeben ist, kann zur Optimierung nur die Gesamtlänge l variiert werden. Dazu werden die Bleche mit einer Breite von 500 mm wie im Bild gezeigt auf zwei Bahnen aufgeteilt, wobei das kürzere Stück eine Länge von $1\,000\text{ m} - l$ hat (eine Aufteilung auf drei Bahnen kommt wegen $3 \cdot 500\text{ mm} > 1\,420\text{ mm}$ nicht in Betracht). Gleichzeitig wird der verbleibende Platz für zwei Bahnen der schmaleren Bleche genutzt, die dann jeweils eine Länge von $2l - 1\,000$ m haben.

Aus der gegebenen Gesamtlänge der schmaleren Bleche folgt nun

$$2\,(2l - 1\,000\text{ m}) + l = 5l - 2\,000\text{ m} = 1\,800\text{ m}$$

und daraus $l = 760$ m.

c) Der Abfall beträgt jetzt $240\text{ m} \times 0{,}1\text{ m} = 24\text{ m}^2$ plus $760\text{ m} \times 0{,}02\text{ m} = 15{,}2\text{ m}^2$, also insgesamt $39{,}2\text{ m}^2$. Das sind nur noch 2,8 % der Gesamtfläche.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011244:

Für ein Quadrat ist offensichtlich, dass das Gleichheitszeichen gilt. Alle anderen Vierecke haben mindestens einen Innenwinkel, der größer als 90° ist; dieser sei o.B.d.A. α.

In einem konvexen Viereck kann man den Kosinussatz für die Diagonalen benutzen:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$$

Nun ist aber $-\cos\alpha > 0$ und daher gilt:

$$f^2 > a^2 + d^2.$$

Folgende Kette gilt wegen der Monotonie von min und wegen $a, d > 0$:

$$a^2 + d^2 \geq 2\min\{a^2, d^2\} = 2[\min\{a, d\}]^2 \geq 2[\min\{a, b, c, d, e, f\}]^2$$

Außerdem ist $\max\{a, b, c, d, e, f\} \geq f$. Wir erhalten:

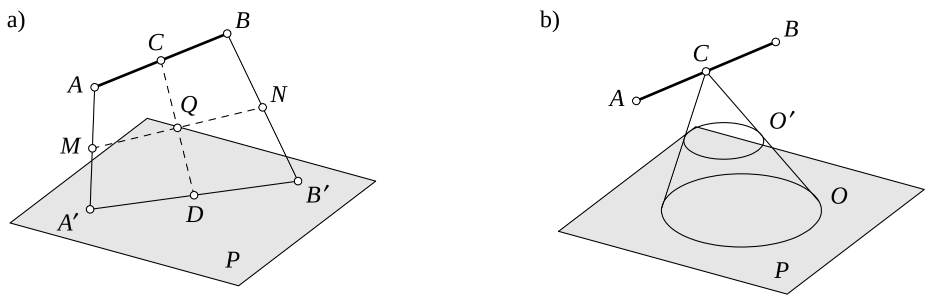
$$\max\{a, b, c, d, e, f\} > \sqrt{2}\min\{a, b, c, d, e, f\} \square$$

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 011245:

a) (Bild a) Beschreiben wir die Lage der Punkte A, B, A', B' usw. mit den Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}'$ bzw. $\vec{b}'$ usw., so sind die Mittelpunkte M und N durch $\vec{m} \equiv \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a}')$ bzw. $\vec{n} \equiv \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{b}')$ gegeben. Der Mittelpunkt Q der Strecke $\overline{MN}$ ist demzufolge gleich dem arithmetischen Mittel $\vec{q} \equiv \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{a}' + \vec{b} + \vec{b}')$ der vier Vektoren. Aufgrund des Kommutativ- und Assoziativgesetzes ist dieser Ausdruck auch der Mittelpunkt derjenigen Strecke, deren Endpunkte durch $\vec{c} \equiv \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ und $\vec{d} \equiv \frac{1}{2}(\vec{a}' + \vec{b}')$ beschrieben werden.

   Der erste Punkt ist der Mittelpunkt C der Strecke $\overline{AB}$ (und damit ein fester Punkt), während der zweite der Mittelpunkt D einer willkürlich gewählten Strecke in P (also selbst ein beliebiger Punkt) ist. Die Mittelpunkte Q aller Strecken $\overline{CD}$ liegen somit nach der Umkehrung des Strahlensatzes in einer Ebene P', die parallel zu P verläuft und z. B. das Lot von C auf P halbiert.



b) Aus den obigen Betrachtungen folgt, dass der geometrische Ort aller Punkte L ebenfalls ein Kreis bzw. dessen Inneres ist, der die Schnittfläche des (schiefen) Kreiskegels mit der Grundfläche O und der Höhe h in halber Höhe ist.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht