1. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1961/1962

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 011231:

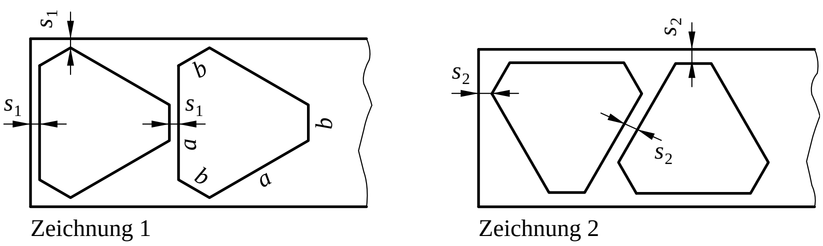
Zwei Ziegeleien produzieren 6 Millionen bzw. 12 Millionen Ziegel. Sie sollen vier Baustellen versorgen, die einen Bedarf von 5,2; 3,0; 5,7 bzw. 4,1 Millionen Ziegel haben. Die Entfernungen (in km) zwischen den zwei Ziegeleien und den vier Baustellen sind aus der folgenden Tabelle ersichtlich:

Baustelle	1	2	3	4
Ziegelei 1	28	30	37	21
Ziegelei 2	26	36	18	20

Wieviel Ziegel müssen von der 1. bzw. 2. Ziegelei zu den einzelnen Baustellen transportiert werden, damit die Gesamttransportkosten möglichst gering sind? Es wird angenommen, daß die Transportkosten der Entfernung proportional sind. Die Baustelle 3 soll dabei nur von der Ziegelei 2 beliefert werden.

Aufgabe 011232:

Aus Aluminiumblech von 2 mm Stärke sollen 10 000 Werkstücke nach der beigefügten Zeichnung 1 gestanzt werden. (Sämtliche Innenwinkel sind gleich groß, $a = 34$ mm, $b = 8$ mm.)



a) Wie lang und wie breit muß der Blechstreifen sein, aus dem gestanzt wird? Dabei ist zu beachten, daß die Stegbreite (Abstand der Teile voneinander bzw. vom Rand) $s_1 = 2$ mm betragen muß. Wieviel Quadratmeter Blech werden verbraucht? Wieviel Quadratmeter beträgt der Abfall?

b) Es wird der Verbesserungsvorschlag gemacht, nach Zeichnung 2 zu stanzen, um Material zu sparen. Wie lang und wie breit muß nunmehr der Blechstreifen genommen werden? Wieviel Quadratmeter Blech wird verbraucht? Wieviel Quadratmeter beträgt der Abfall? Wieviel Prozent beträgt die Materialersparnis gegenüber dem unter a) angegebenen Verfahren? (Stegbreite hier $s_2 = 3$ mm.)

Aufgabe 011233:

Einem Würfel von der Kantenlänge a werden ein Tetraeder und ein Oktaeder einbeschrieben.

a) Wie verhalten sich die Volumina der 3 Körper zueinander?

b) Dem Tetraeder wird noch eine Kugel einbeschrieben. Begründen Sie, daß diese Kugel gleichzeitig das Oktaeder berührt, und drücken Sie das Volumen dieser Kugel als Funktion von a aus!

Aufgabe 011234:

Bemerkung 011334 = 011135

Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB} = a = 6$ cm. M sei der Mittelpunkt der Strecke. Schlagen Sie mit $\overline{AM}$ um M den Halbkreis über $\overline{AB}$! Halbieren Sie $\overline{AM}$ und $\overline{MB}$ und schlagen Sie über beiden Strecken mit $\frac{\overline{AM}}{2}$ die beiden Halbkreise, die innerhalb des großen Halbkreises liegen!

Es ist der Mittelpunkt des Kreises zu konstruieren, der den großen Halbkreis von innen und die beiden kleinen Halbkreise von außen berührt! Die Konstruktion ist zu begründen!

Aufgabe 011235:

Es ist zu beweisen, daß $x + y \leq a\sqrt{2}$, wenn $x^2 + y^2 = a^2$ und $a \geq 0$ ist!

1. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 011231:

Zur Bestimmung der optimalen Belieferung muss die Kostenfunktion in Abhängigkeit von den beeinflussbaren Parametern ausgedrückt werden. Diese Funktion ist die Summe der Transportkosten zu den einzelnen Baustellen bzw. (aufgrund der Proportionalität) die Entfernung, über die hinweg die Ziegel transportiert werden.

Wenn man die Lieferungen von Ziegelei 2 (Z2) - in Millionen Ziegeln - an die Baustellen 1, 2 und 4 (B1 usw.) mit x, y und z bezeichnet (B3 braucht nicht beachtet zu werden), erhält man

$$K(x,y,z) = 28(5{,}2-x) + 26x + 30(3{,}0-y) + 36y + 21(4{,}1-z) + 20z = 321{,}7 - 2x + 6y - z.$$

Als Nebenbedingung gilt dabei $x + y + z = 6{,}3$, d.h. Z2 liefert 6,3 Millionen Ziegel an B1, B2 und B4; die restlichen 5,7 Millionen gehen an B3. Die Funktion K soll minimal werden.

Das ist der Fall, wenn x und z möglichst große, y dafür einen kleinen Wert annimmt, wie man an den Vorzeichen sieht. Die Nebenbedingung fügt man ein, in dem man $\tilde{K}(y,z) = K(6{,}3-y-z,y,z) = 309{,}1+8y+z$ festlegt.

Zu beachten sind weiterhin $0 \leq y \leq 3{,}0$ und $0 \leq z \leq 4{,}1$ (nur dieser Bereich ist für Lieferungen der Z2 an B2 bzw. B4 sinnvoll), sowie $1{,}1 \leq y + z \leq 6{,}3$ (B1 kann höchstens 5,2 Millionen Ziegel von Z2 bekommen).

In $\tilde{K}$ haben sowohl y als auch z positive Vorzeichen, beide müssen also so klein wie möglich werden. Den kleinsten Wert für $\tilde{K}(y,z)$ erhält man für $y = 0$ und $z = 1{,}1$, da y den größeren Vorfaktor hat. Es folgt $x = 5{,}2$.

Zusammengefasst: Z1 liefert je 3 Millionen Ziegel an B2 und B4, Z2 liefert 5,2 Millionen an B1 und 1,1 Millionen an B4.

Hinweis: Das aus der Schule bekannte Verfahren, (lokale) Minima mittels Ableitungen zu bestimmen, funktioniert hier nicht. Grund dafür ist, dass die Funktion K (bzw. $\tilde{K}$) in ihren Argumenten linear ist. Extrema treten in diesem Fall nur global auf an den Rändern der durch die Ungleichungen festgelegten Bereiche.

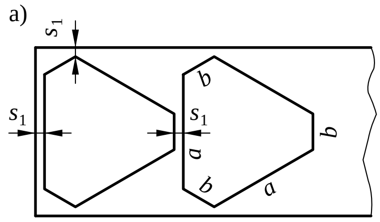
Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

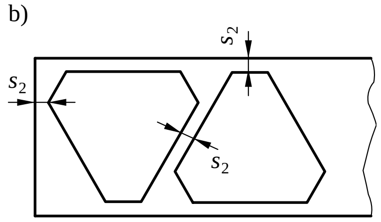
Lösung 011232:

Da das Werkstück ein Sechseck mit gleich großen Innenwinkeln ist, beträgt jeder Innenwinkel

$$\frac{1}{6}(6-2)\cdot 180° = 120°.$$

Wir berechnen nachfolgend die Länge (in Längsrichtung des Blechstreifens) und Breite (in Querrichtung) eines Werkstücks und daraus die erforderlichen Abmessungen.





a) (Bild a) Die Länge beträgt

$$b \cdot \cos(30°) + a \cdot \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b) = 36{,}373\,\text{mm},$$

für 10 000 Werkstücke also 363,730 m zuzüglich 20,002 m für 10 001 Abstände s_1.

Der Blechstreifen muss somit insgesamt 383,732 m lang sein. Die Breite des Werkstücks ist

$$a + 2b\sin(30°) = a + b = 42\,\text{mm},$$

zusammen mit zwei Abständen s_1 muss der Blechstreifen 46 mm breit sein.

Seine Fläche beträgt $383{,}732\,\text{m} \cdot 0{,}046\,\text{m} = 17{,}652\,\text{m}^2$. Die Fläche eines Werkstücks ist gleich der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge $a + 2b$ abzüglich der Fläche dreier gleichseitiger Dreiecke der Seitenlänge b, also

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(a+2b)^2 - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = 999{,}4\,\text{mm}^2.$$

Die 10 000 Werkstücke beanspruchen somit eine Fläche von $9{,}994\,\text{m}^2$, woraus sich der Abfall zu $7{,}658\,\text{m}^2$ berechnet.

b) (Bild b) Da die Werkstücke jetzt um 90° gedreht werden, ist die Breite gleich der Länge aus a), zusammen mit der doppelten Stegbreite s_2 ergibt sich eine Breite des Blechstreifens von 42,4 mm.

Zur Berechnung der Länge wird zunächst $s_2 = 0$ angenommen. Die Schwerpunkte zweier Werkstücke sind dann

$$\frac{b}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{1}{2}(a+3b) = 29{,}0\,\text{mm}$$

entfernt.

Die gesamte Länge des Blechstreifens ist hier

$$9\,999 \cdot [29{,}0\,\text{mm} + s_2\cos(30°)] + 2 \cdot 21{,}0\,\text{mm} + 2s_2 = 315{,}997\,\text{m},$$

der Verbrauch $13{,}398\,\text{m}^2$ sowie der Abfall $3{,}404\,\text{m}^2$.

Die Materialersparnis beträgt gegenüber a) 24,1 %.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011233:

Da der Würfel sechs Quadrate als Oberfläche besitzt und das Tetraeder sechs Kanten hat, nehmen wir sechs geeignete Oberflächendiagonalen als Kanten des Tetraeders (Bild a), die selbstverständlich gleich lang sind und damit tatsächlich ein regelmäßiges Tetraeder bilden.

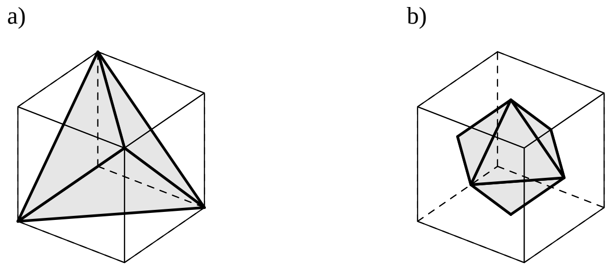
Das Oktaeder hat sechs Eckpunkte, so dass die Mittelpunkte der Oberflächen des Würfels als Eckpunkte eines regelmäßigen Oktaeders gewählt werden können (Bild b).

a) Das Tetraeder schneidet vom Würfel mit dem Volumen $V_W = a^3$ vier dreiseitige Pyramiden ab, wobei das Volumen jede dieser Pyramiden mittels $V = \frac{1}{3}Ah$ berechnet werden kann.

Dazu wählen wir das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck mit der Kathetenlänge a als Grundfläche, also $A = \frac{1}{2}a^2$. Die Höhe beträgt ebenfalls $h = a$, so dass $V = \frac{1}{6}a^3$ folgt. Daraus ergibt sich das Volumen des Tetraeders zu $V_T = a^3 - 4 \cdot \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3}a^3$.

Für das Oktaeder ergibt sich eine Kantenlänge von $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; es kann aus zwei vierseitigen Pyramiden zusammengesetzt werden. Die Grundseiten dieser Pyramiden (ein Quadrat) haben einen Flächeninhalt von $A = \frac{1}{2}a^2$, somit hat das Oktaeder ein Volumen von $V_O = 2 \cdot \frac{1}{6}a^2 \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a^3$.

Die Volumina stehen also im Verhältnis $V_W : V_T : V_O = 6 : 2 : 1$.



b) Um den Radius der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel zu bestimmen, betrachten wir zunächst die Umkugel des Tetraeders. Diese ist offenbar mit der Umkugel des Würfels identisch, so dass die halbe Raumdiagonale des Würfels gleich dem Umkugelradius ist: $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Die Inkugel mit dem Radius r berührt dagegen die Tetraederflächen von innen, wobei jede Tetraederfläche eine Tangentialebene an die Inkugel im Berührungspunkt aufspannt. Somit liegen Würfeleckpunkt, Berührungspunkt und Mittelpunkt auf einer Geraden, und es gilt $R = h + r$ bzw. $r = R - h$ mit h als Höhe der unter a) betrachteten dreiseitigen Pyramiden mit dem (jetzt *gleichseitigen*) Dreieck als Grundfläche.

Diese Höhe berechnet sich aus der obigen Volumenformel mit

$$V = \frac{1}{6}a^3 \text{ zu } h = \frac{3V}{A} = \frac{a^3/2}{\sqrt{3}a^2/2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$
$$\text{Daraus folgt } r = \frac{1}{2\sqrt{3}}a = \frac{1}{3}R.$$

Alternative Berechnung des Inkugelradius:

Betrachte das sog. *Seitenmittentetraeder*, das die Schwerpunkte der Seitenmitten des ursprünglichen Tetraeders miteinander verbindet. Dessen Umkugel ist gleich der gesuchten Inkugel, da die Inkugel die Tetraederflächen in den Schwerpunkten der gleichseitigen Dreiecke, die die Oberfläche des Tetraeders bilden, berührt.

Mit Hilfe des bekannten Satzes, dass der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2 teilt, folgt $r = \frac{1}{3}R$.

Mithin hat die Inkugel ein Volumen von $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{24\sqrt{3}}a^3$.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011234:

Bemerkung 011334 = 011135

I. Analyse:

Der Berührungspunkt des Halbkreise über AM bzw. über MB mit dem zu konstruierenden Kreis k sei K bzw. L, der Berührungspunkt des Halbkreise über AB mit k sei N. Die Mittelpunkte von AM bzw. BM werden mit P bzw. Q bezeichnet.

Da die Tangenten von k und den Halbkreis über AM in K identisch sind und die Tangenten senkrecht auf den Radien stehen, geht die Strecke zwischen dem Mittelpunkt R vom Kreis k und P durch K.

Analog folgt, dass L auf RQ liegt. Da $RP = \frac{AM}{2} + RK = RQ$ gilt, ist $\sphericalangle PMR = 90°$ und es gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$\left(\frac{AM}{2}\right)^2 + (AM - RN)^2 = \left(\frac{AM}{2} + RK\right)^2.$$

Aus $RN = RK$ folgt

$$\frac{1}{4}(AM)^2 + (AM)^2 - 2(AM)(RN) + (RN)^2 = \frac{1}{4}(AM)^2 + (AM)(RN) + (RN)^2.$$

Also ist $(AM)^2 = 3(AM)(RN)$, d. h.

$$RN = \frac{1}{3}AM = \frac{a}{6} = 1\text{ cm und}$$
$$MR = MT - RN = 2\text{ cm}.$$

II. Konstruktionsbeschreibung:

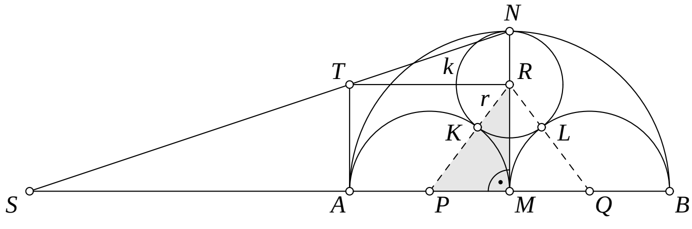
(1) Konstruiere die Mittelsenkrechte von AB und bezeichne den Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten und den Halbkreis über AB mit N.

(2) Nun konstruiere einen Punkt S auf der Verlängerung von AM über A hinaus mit $SM = 3AM$. Konstruiere die Senkrechte zu SM in A, bezeichne den Schnittpunkt dieser Senkrechten und SN mit T. Dann ist nach Strahlensatz $TN = \frac{1}{3}SN$.

(3) Konstruiere nun das Lot von T auf MN und bezeichne den Lotfußpunkt mit R, so ist nach Strahlensatz $NR = \frac{TN}{SN}MN = 1$ cm, d. h. R ist nach obiger Vorbetrachtung der Mittelpunkt des Kreises k, der die kleinen Halbkreise außen und den großen Halbkreis innen berüht.

(4) Schlage einen Kreis um R mit den Radius RN.

III. Konstruktion:



Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 011235:

Die kürzeste Variante ist diejenige mit der Ungleichung über das quadratische und arithmetische Mittel, falls x, y positive Zahlen sind:

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad \Longrightarrow \qquad x+y \leq \sqrt{2}\,a.$$

Wegen $a \geq 0$ gilt die Behauptung erst recht für nichtpositive x, y. Die Ungleichung selbst kann einfach wie folgt gezeigt werden:

$$\begin{aligned}
(x-y)^2 &\geq 0\\
x^2+y^2 &\geq 2xy\\
2\left(x^2+y^2\right) &\geq x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2\\
\frac{x^2+y^2}{2} &\geq \frac{(x+y)^2}{4} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2\\
\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} &\geq \frac{x+y}{2}. \quad \square
\end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht