1. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1961/1962

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 011211:

Ist die Summe $21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar? Die Antwort ist zu begründen!

Aufgabe 011212:

Bei der Planung unserer sozialistischen Volkswirtschaft werden in zunehmendem Maße mathematische Methoden angewandt. Das gilt ganz besonders für das Transportwesen, bei dem es darauf ankommt, mit möglichst geringen Kosten eine optimale Leistung zu erreichen. Man nennt die angewandte Methode, die erstmalig 1939 von Prof. L. W. Kantorowitsch in Leningrad vorgeschlagen wurde, die Methode der linearen Programmierung. Das folgende Beispiel, das sehr stark vereinfacht wurde, da in Wirklichkeit die Verhältnisse viel komplizierter sind, zeigt das Prinzip der Methode:

Zwei Ziegeleien produzieren 10 Millionen bzw. 15 Millionen Ziegel. Sie sollen zwei Baustellen versorgen, die einen Bedarf von 18 Millionen bzw. 7 Millionen Ziegel haben. Die Entfernungen betragen:

1. Ziegelei zur 1. Baustelle 25 km,
1. Ziegelei zur 2. Baustelle 24 km,
2. Ziegelei zur 1. Baustelle 26 km,
2. Ziegelei zur 2. Baustelle 20 km.

Zu welchen Baustellen müssen die von der 1. bzw. 2. Ziegelei produzierten Ziegel transportiert werden, damit die Gesamttransportkosten möglichst gering sind? Dabei wird angenommen, daß die Transportkosten der Entfernung proportional sind.

Aufgabe 011213:

Wieviel verschiedene dreistellige Zahlen lassen sich mit den Ziffern

a) 1 und 2, b) 1, 2 und 3, c) 1, 2, 3 und 4

bilden, wobei die Ziffern auch mehrfach benutzt werden dürfen?

Versuchen Sie, eine Gesetzmäßigkeit zu finden!

d) Welche Lösung erhält man für vierstellige Zahlen?

e) Was läßt sich für vierstellige Zahlen vermuten, wenn man n Ziffern zur Verfügung hat? Versuchen Sie, diese Vermutung zu beweisen!

Aufgabe 011214:

Es ist ein Dreieck ABC aus $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ und $\sphericalangle BMA = \omega$ zu konstruieren, wobei M die Mitte der Strecke $\overline{BC}$ ist. Es sei $\omega < 90°$.

Man beweise, daß die Aufgabe dann und nur dann lösbar ist, wenn $b \cdot \tan \frac{\omega}{2} \leq c < b$ ist. In welchem Falle tritt Gleichheit auf?

Aufgabe 011215:

Zur Berechnung der Länge l eines Treibriemens wird in der Praxis die Näherungsformel

$$l = \pi \frac{D+d}{2} + 2a + \frac{(D-d)^2}{4a}$$

benutzt. Dabei ist

d der Durchmesser der treibenden Scheibe,
D der Durchmesser der getriebenen Scheibe und
$\overline{M_1M_2} = a$ der Abstand der beiden Achsen.

Für die folgenden beiden Beispiele soll die Länge des Treibriemens genau und nach der Näherungsformel berechnet werden.

Wie groß ist in den beiden Beispielen der relative Fehler (in Prozent), der bei Anwendung der Näherungsformel entsteht?

a) $d = 140$ mm, $D = 220$ mm, $a = 500$ mm,

b) $d = 60$ mm, $D = 220$ mm, $a = 200$ mm.

1. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 011211:

Da für 45 die Primzahlzerlegung $45 = 3^2 \cdot 5$ gilt, ist zu zeigen, dass die Summe $21^{39} + 39^{21}$ durch 3^2 und 5 teilbar ist.

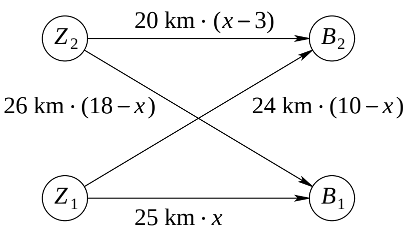
Die letzte Ziffer von 21^n ist für jedes natürliche n gleich 1, und die letzte Ziffer von 39^{2n+1} ist für jedes natürliche n gleich 9. Daher ist die letzte Ziffer der Summe gleich 0 und die Summe damit durch 5 teilbar.

Wegen $21 = 3 \cdot 7$ und $39 = 3 \cdot 13$ ist sowohl 21^{39} als auch 39^{21} durch 3^2 teilbar und damit auch die Summe. Also ist $21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar. $\square$

Bemerkung: Wegen $21 \equiv 1 \pmod{20}$, $39 \equiv -1 \pmod{20}$ ist $21^{39} + 39^{21} \equiv 1^{39} + (-1)^{21} \equiv 0 \pmod{20}$, und wegen $21^{39} + 39^{21} = 3^{21}(7^{39} \cdot 3^{18} + 13^{21})$ ist $21^{39} + 39^{21}$ sogar durch $3^{21} \cdot 20$ teilbar.

Aufgeschrieben von Burkhard Thiele – Quelle: (2)

Lösung 011212:



Die von der i. Ziegelei Z_i zur j. Baustelle B_j $(i, j = 1, 2)$ zu transportierenden Mengen an Ziegeln seien z_{ij}, insbesondere sei $z_{11} = x$ (alle Mengenangaben in Millionen Stück). Dann gilt gemäß Aufgabenstellung: $z_{12} = 10 - x$, $z_{21} = 18 - x$ und $z_{22} = x - 3$. Dabei müssen alle $z_{ij} \geq 0$ sein; diese Bedingungen führen auf die Ungleichungen

$$3 \leq x \leq 10. \tag{1}$$

Nun stellen wir die *Kostenfunktion* auf, die die Summe aller Produkte aus Anzahl zu transportierender Ziegel mal jeweilige Entfernung ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= 25\,\text{km} \cdot x + 24\,\text{km} \cdot (10 - x) + 26\,\text{km} \cdot (18 - x) + 20\,\text{km} \cdot (x - 3) \\ &= -5\,\text{km} \cdot x + 648\,\text{km} \quad \longrightarrow \quad \text{Min.} \end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Funktion mit negativem Anstieg, die ihren Minimalwert wegen (1) folglich an der rechten Intervallgrenze $x = 10$ annimmt. Daraus ergibt sich: $z_{11} = 10$, $z_{12} = 0$, $z_{21} = 8$ und $z_{22} = 7$.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011213:

Wir haben es hier mit *Variationen mit Wiederholung* zu tun, denn wir wollen k, nicht notwendig verschiedene Elemente aus der Menge der ersten n natürlichen Zahlen auswählen und in einer Reihe aufschreiben (also mit Beachtung der Reihenfolge). Dabei haben wir für jede der k Stellen in der Reihe n Möglichkeiten, demnach ist die gesuchte Anzahl $V(n,k)$ gegeben durch

$$V(n,k) = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{k\text{-mal}} = n^k.$$

Somit lassen sich

a) $V(2,3) = 2^3 = 8$, b) $V(3,3) = 3^3 = 27$, c) $V(4,3) = 4^3 = 64$ verschiedene dreistellige Zahlen bilden.

d) Für vierstellige Zahlen finden wir analog $2^4 = 16$, $3^4 = 81$ bzw. $4^4 = 256$ verschiedene Lösungen.

e) Haben wir dagegen n Ziffern zur Verfügung, so lassen sich

- n Zahlen mit vier gleichen Ziffern $aaaa$ angeben,
- $4n(n-1)$ Zahlen mit drei gleichen Ziffern $aaab$ angeben (n Möglichkeiten, die Ziffer a auszuwählen, $n-1$ Möglichkeiten die Ziffer b auszuwählen und 4 Plätze, an denen b stehen kann),
- $3n(n-1)$ Zahlen der Form $aabb$ angeben (n Möglichkeiten, die Ziffer a auszuwählen, $n-1$ Möglichkeiten die Ziffer b auszuwählen und 3 Möglichkeiten für die Platzwahl der beiden Paare aa bzw. bb),
- $6n(n-1)(n-2)$ Zahlen der Form $aabc$ angeben (n Möglichkeiten, die Ziffer a auszuwählen, $n-1$ Möglichkeiten die Ziffer b auszuwählen, $n-2$ Möglichkeiten die Ziffer c auszuwählen und $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten für die Platzwahl der Ziffern b und c bzw. der Ziffern a und a),
- schließlich $n(n-1)(n-2)(n-3)$ Zahlen $abcd$ mit vier verschiedenen Ziffern angeben.

Die Gesamtzahl ist also

$$n + 4n(n-1) + 3n(n-1) + 6n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4.$$

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

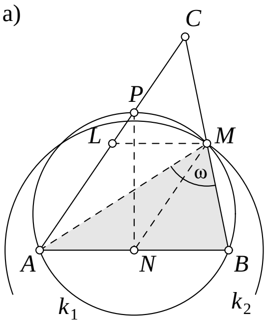
Lösung 011214:

I. Konstruktion:

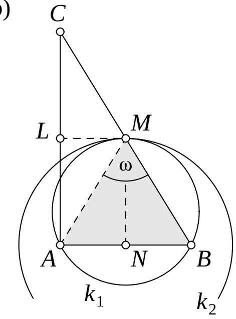
(Bild a) Das Hilfsdreieck AMB kann aus den gegebenen Stücken konstruiert werden, denn Punkt M liegt auf dem Kreis k_1, der über der Sehne $\overline{AB} = c$ derjenige geometrische Ort aller Punkte ist, für die $\sphericalangle BMA = \omega$ gilt.

Sei ferner LMN das Seitenmittendreieck von $\triangle ABC$. Dann ist $ALMN$ nach den Strahlensätzen ein Parallelogramm und somit $\overline{AL} = \overline{MN} = \frac{b}{2}$, d. h., ein zweiter geometrischer Ort für M ist der Kreis k_2 mit dem Radius $\frac{b}{2}$ um N.

a)



b)



II. Beweis:

Wegen $\omega < 90°$ muss $\frac{b}{2} > \frac{c}{2}$, also $c < b$ gelten, da in den Dreiecken AMC und AMB dem größeren Winkel (hier $\sphericalangle CMA > \sphericalangle BMA$) auch die größere Seite gegenüberliegt.

Die Aufgabe ist also nur lösbar, wenn beide Kreise Punkte gemeinsam haben. Gewöhnlich sind dies zwei Lösungen, die auch zu zwei nichtkongruenten Dreiecken ABC führen. Berühren sich beide Kreise von innen, gibt es nur eine Lösung (Bild b).

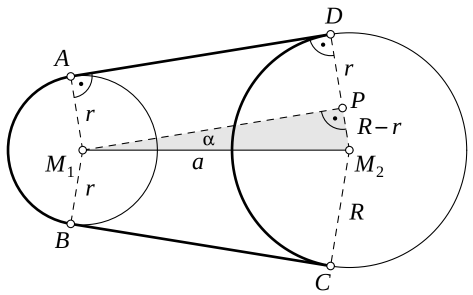
Hier wird ω vom Radius MN halbiert und wegen $MN \parallel AC$ sowie $MN \perp AB$ ist $\tan\omega = \frac{c/2}{b/2} = \frac{c}{b}$ und mithin $c = b\tan\frac{\omega}{2}$. In allen anderen Fällen kann man in N eine Senkrechte auf AB errichten, die k_1 in P schneidet. Dann gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\omega = \sphericalangle BMA = \sphericalangle BPA$ und $MN = \frac{b}{2} < x \equiv PN = \frac{c}{2}\cot\frac{\omega}{2}$. Also ist hier $b\tan\frac{\omega}{2} < c$ und somit allgemein

$$b \cdot \tan\frac{\omega}{2} \leq c < b. \tag{1}$$

Umgekehrt folgt aus (1), dass k_1 und k_2 Schnittpunkte haben und die Aufgabe lösbar ist. □

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011215:



Wir berechnen zunächst die genaue Länge des Treibriemens. Dazu seien A, B und C, D diejenigen Punkte, an denen sich der Riemen von der treibenden bzw. getriebenen Scheibe (Mittelpunkte M_1 bzw. M_2 und Radien r bzw. R) löst.

AD und BC sind dann die gemeinsamen äußeren Tangenten beider Kreise, die wir z. B. dadurch finden, indem wir ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse $M_1M_2 \equiv a$, der Kathete $PM_2 = R - r$ und $\sphericalangle M_1PM_2 = 90°$ konstruieren und die Kathete M_1P um r parallel nach außen verschieben.

Bezeichnen wir noch den Winkel $\sphericalangle PM_1M_2 \equiv \alpha$, dann gilt $\sin\alpha = \frac{R-r}{a}$, und die geradlinigen Teile des Riemens haben die Länge $AD = BC = a\cos\alpha$, die beiden Kreisbögen die Länge $AB = (\pi - 2\alpha)r$ bzw. $CD = (\pi + 2\alpha)R$ (α im Bogenmaß gemessen), insgesamt also

$$\bar{l} = 2a\cos\alpha + (\pi - 2\alpha)r + (\pi + 2\alpha)R = \pi(R + r) + 2a(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha). \tag{1}$$

Für kleine Winkel α ergibt sich daraus mit $\frac{R-r}{a} = \sin\alpha \approx \alpha$ und $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \approx 1 - \frac{(R-r)^2}{2a}$ die in der Aufgabenstellung angegebene Näherungsformel

$$l \approx \pi(R + r) + 2a + \frac{(R - r)^2}{a}. \tag{2}$$

Mit den gegebenen Werten für $d = 2r$, $D = 2R$ sowie a ergeben sich nun mit (1) und (2) folgende Winkel, Längen und relativen Fehler:

a) $\alpha = 4{,}59°$, $\bar{l} = 1\,568{,}7$ mm, $l = 1\,568{,}7$ mm, $\frac{|l-\bar{l}|}{\bar{l}} = 0{,}00\,\%$,

b) $\alpha = 23{,}58°$, $\bar{l} = 872{,}3$ mm, $l = 871{,}8$ mm, $\frac{|l-\bar{l}|}{\bar{l}} = 0{,}05\,\%$.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972