1. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Saison 1961/1962

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 010911:

Berechnen Sie:

$$\left(\frac{9}{10}m^4 - 3\frac{211}{360}m^2 + 5\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2}\right) : \left(1\frac{1}{2}m^2 + 1\frac{2}{3}m - 6\right).$$

Aufgabe 010912:

In der Ballistik verwendet man häufig den Begriff "mittlere Präzision" p_m. Nimmt man p_m als Radius eines Kreises, dann liegen in diesem Kreis etwa 20 Prozent aller Treffer. Sämtliche Treffer erfaßt man mit einem Kreis, der einen etwa $4\frac{1}{2}$mal so großen Radius hat. Westliche Militärexperten rechnen z. Zt. mit einer mittleren Präzision (bei Raketen) von $p_\mathrm{m} = 0{,}5$ Prozent der Schußweite. Später wollen sie Werte von $p_\mathrm{m} = 0{,}1$ Prozent und in ferner Zukunft sogar $p_\mathrm{m} = 0{,}05$ Prozent erreichen.

a) Wie groß wäre bei diesen Werten der Radius des 20 Prozent-Kreises bzw. der des alle Treffer enthaltenden Kreises, wenn die Schußweite 12 500 km beträgt?

b) Welche mittlere Präzision p_m wurde von der Sowjetunion erreicht, wenn man berücksichtigt, daß der Radius des alle Treffer enthaltenden Kreises bei den im Oktober 1961 durchgeführten Versuchen kleiner als 1 km war?

Aufgabe 010913:

Um beim Zerspanen von Metallen die Schneidfähigkeit der Werkzeuge zu erhalten, wird vielfach mit einer Emulsion aus gefettetem Mineralöl (Dichte $0{,}98\,\mathrm{g/cm^3}$) und möglichst weichem Wasser (Dichte $1{,}0\,\mathrm{g/cm^3}$) gekühlt. Die Mischung muß für Schneidwerkzeuge höherer Festigkeit die Dichte $0{,}996\,\mathrm{g/cm^3}$, bei Schleifarbeiten die Dichte $0{,}992\,\mathrm{g/cm^3}$ haben. Wieviel Liter gefettetes Mineralöl und wieviel Liter weiches Wasser braucht man für jeweils 10 Liter Emulsion?

Aufgabe 010914:

Jeder Buchstabe entspricht einer der Ziffern von 0 bis 9, gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

```
 OTTO    MAIS    OTTO    MAIS    OTTO
-ROSE   -SALZ   -SALZ   -ROSE   -MAIS
 4709    2963    3497    4175     534
```

Aufgabe 010915:

Bei welchen Dreiecken liegen die Mitten der drei Höhen auf einer Geraden?

Die Behauptung ist zu beweisen!

Aufgabe 010916:

Schlagen Sie einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm! Konstruieren Sie in diesen Kreis ein beliebiges Parallelogramm so, daß dessen Eckpunkte auf der Kreisperipherie liegen! Halbieren Sie die Seiten des Parallelogramms und verbinden Sie die Halbierungspunkte fortlaufend!

Wie groß ist der Umfang der so entstehenden Figur? Die Behauptung ist zu beweisen!

1. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 010911:

Mit Polynomdivision erhalten wir:

$$\begin{array}{l}
\left(\frac{9}{10}m^4 - 3\frac{211}{360}m^2 + 5\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2}\right) : \left(1\frac{1}{2}m^2 + 1\frac{2}{3}m - 6\right) = \frac{3}{5}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{3}{4}.\\
\underline{-\left(\frac{9}{10}m^4 + m^3 - 3\frac{3}{5}m^2\right)}\\
\qquad -m^3 + \frac{1}{72}m^2 + 5\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2}\\
\quad \underline{-\left(-m^3 - 1\frac{1}{9}m^2 + 4m\right)}\\
\qquad\qquad 1\frac{1}{8}m^2 + 1\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2}\\
\qquad\quad \underline{-\left(1\frac{1}{8}m^2 + 1\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2}\right)}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns

Lösung 010912:

a) Der Wert p_m gibt den Prozentwert des Verhältnisses des Radius r_{20} des 20 %-Kreises zur Schußweite an. Da für den Radius r_{100} des Kreises, in dem alle Treffer landen, $r_{100} = 4\frac{1}{2}r_{20}$ gilt, haben die Kreise für die angegebenen p_m die folgenden Radien:

p_m	0,5 %	0,1 %	0,05 %
r_{20}	62,5 km	12,5 km	6,25 km
r_{100}	281,25 km	56,25 km	28,125 km

b) Ist $r_{100} < 1$ km, so ist $r_{20} = \frac{2}{9}r_{100} < \frac{2}{9}$ km $= 0{,}222$ km. Somit ist das Verhältnis von r_{20} zur Schußweite kleiner als $\frac{0{,}222\,\mathrm{km}}{12\,500\,\mathrm{km}} \approx 0{,}000\,018$, also $p_\mathrm{m} < 0{,}0018\,\%$.

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns

Lösung 010913:

Die Dichte ϱ eines Stoffes ist der Quotient aus Masse m und Volumen V einer bestimmten Menge dieses Stoffes. Da man es hier mit einer Mischung zweier Stoffe zu tun hat, muss die *Mischungsregel* beachtet werden. Danach gilt für die Dichte ϱ_E der Emulsion

$$\varrho_\mathrm{E} = \frac{\varrho_{\text{Öl}} \cdot V_{\text{Öl}} + \varrho_\mathrm{W} \cdot V_W}{V_{\text{Öl}} + V_\mathrm{W}}, \tag{1}$$

wobei $\varrho_{\text{Öl}}$, $V_{\text{Öl}}$ Dichte und Volumen des verwendeten Öls sowie ϱ_{W}, V_{W} Dichte und Volumen des verwendeten Wassers sind. Da nach Aufgabenstellung das Gesamtvolumen $V = V_{\text{Öl}} + V_{\text{W}} = 10\,\text{l} = 10\,000\,\text{cm}^3$ gegeben ist, können wir in (1) $V_{\text{Öl}} = V - V_{\text{W}}$ ersetzen und erhalten nach Umstellen

$$V_{\text{W}} = \frac{\varrho_{\text{E}} - \varrho_{\text{Öl}}}{\varrho_{\text{W}} - \varrho_{\text{Öl}}} V.$$

Soll die Emulsion eine Dichte von $0{,}996\,\text{g/cm}^3$ haben, braucht man also $8\,\text{l}$ Wasser und $2\,\text{l}$ Öl. Für eine Emulsion mit einer Dichte von $0{,}992\,\text{g/cm}^3$ braucht man $6\,\text{l}$ Wasser und $4\,\text{l}$ Öl.

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns

Lösung 010914:

In der letzten Gleichung muß es beim Übergang von der 2. zur 1. Stelle einen Übertrag geben, da $\mathtt{M} \neq \mathtt{O}$. Also ist $\mathtt{M} + \mathtt{1} = \mathtt{O}$. Da die Subtraktion in der letzten Stelle der ersten Gleichung eine $\mathtt{9}$ ergibt, gilt $\mathtt{O} + \mathtt{1} = \mathtt{E}$. Die Betrachtung der nachfolgenden Stelle ergibt $\mathtt{S} + \mathtt{1} = \mathtt{T}$. Wegen $\mathtt{L} \neq \mathtt{T}$ gibt es in der 3. Gleichung beim Übergang von der 4. zur 3. Stelle keinen Übertrag, also gilt $\mathtt{T} + \mathtt{1} = \mathtt{L}$ und $\mathtt{7} + \mathtt{Z} \leq \mathtt{9}$. Also ist $\mathtt{Z} \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}\}$.
Wäre $\mathtt{Z} = \mathtt{2}$, so ist $\mathtt{O} = \mathtt{7} + \mathtt{Z} = \mathtt{9}$ und $\mathtt{E} = \mathtt{O} + \mathtt{1} = \mathtt{10}$, was nicht möglich ist.
Wäre $\mathtt{Z} = \mathtt{1}$, so wäre $\mathtt{O} = \mathtt{7} + \mathtt{Z} = \mathtt{8}$, wegen der 2. Gleichung $\mathtt{S} = \mathtt{4}$ und mit obigen Betrachtungen $\mathtt{T} = \mathtt{5}$ und $\mathtt{L} = \mathtt{6}$. Die 3. Gleichung hätte dann die Form

$$\begin{array}{r} \mathtt{8558} \\ \underline{\mathtt{-4A61}} \\ \mathtt{3497} \end{array}$$

Dann gäbe es keine Möglichkeit für $\mathtt{A}$. Damit bleibt für den Wert von $\mathtt{Z}$ nur $\mathtt{0}$ übrig. Dies führt zunächst zu $\mathtt{O} = \mathtt{7}$, $\mathtt{S} = \mathtt{3}$, $\mathtt{M} = \mathtt{6}$, $\mathtt{E} = \mathtt{8}$, $\mathtt{T} = \mathtt{4}$ und $\mathtt{L} = \mathtt{5}$ und die Gleichungen erhalten die Form

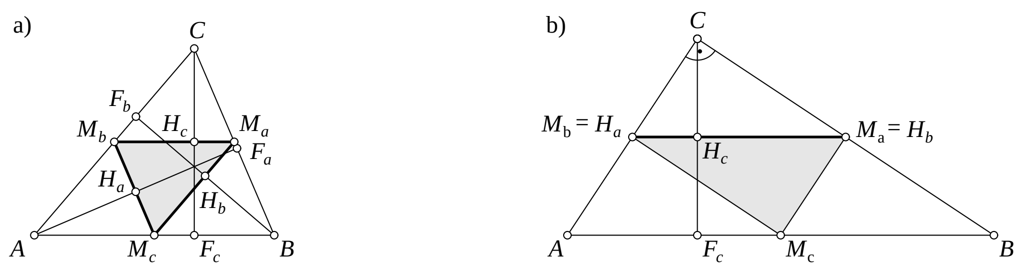
$$\begin{array}{rrrrr} \mathtt{7447} & \mathtt{6913} & \mathtt{7447} & \mathtt{6913} & \mathtt{7447} \\ \underline{\mathtt{-2738}} & \underline{\mathtt{-3950}} & \underline{\mathtt{-3950}} & \underline{\mathtt{-2738}} & \underline{\mathtt{-6913}} \\ \mathtt{4709} & \mathtt{2963} & \mathtt{3497} & \mathtt{4175} & \mathtt{534} \end{array}$$

Also gilt weiterhin $\mathtt{R} = \mathtt{2}$, $\mathtt{I} = \mathtt{1}$ und $\mathtt{A} = \mathtt{9}$.

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns

Lösung 010915:

Das ist genau bei den rechtwinkligen Dreiecken der Fall (Bild b). In diesem Fall sind die beiden Katheten auch Höhen des Dreiecks. Die Verbindungslinie zwischen den Mitten der Katheten ist parallel zur Hypotenuse. Nach Strahlensatz wird die dritte Höhe auch in der Mitte geteilt.



Aufwändiger ist es zu zeigen, dass die Behauptung für andere Dreiecke nicht zutrifft. Betrachten wir zuerst spitzwinklige Dreiecke (Bild a); die Bezeichnung sei so gewählt, dass h_a die längste Höhe ist. Die Fußpunkte der Höhen seien F_a, F_b und F_c, deren Mittelpunkte H_a, H_b und H_c. Die Seiten haben die Mittelpunkte M_a, M_b und M_c.

Dann ist der senkrechte Abstand von M_b, M_c und H_a zur Seite a gleich.

Weiterhin gilt $h_c < b$ und $h_b < c$ (Kathete kürzer als Hypotenuse), woraus $BH_b < BM_c$ und $CH_c < CM_b$

folgen. Damit ist der senkrechte Abstand von H_b und H_c zu a geringer als der von H_a. Weil h_a aber zwischen H_b und H_c liegt, kann H_a nicht auf der Geraden H_bH_c liegen.

Für stumpfwinklige Dreiecke gilt Ähnliches, allerdings ist dann der senkrechte Abstand von H_b und H_c zu a größer als der von H_a.

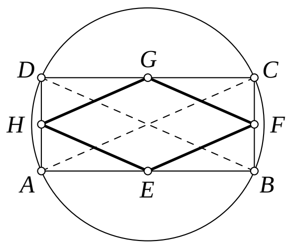
Alternativer Beweis von Eckard Specht: Die Mittelpunkte H_a, H_b und H_c der Höhen des Dreiecks ABC liegen nach dem Strahlensatz auf den Seiten des Seitenmittendreiecks $M_aM_bM_c$ (Bild a). Offensichtlich fallen dabei keine H_i übereinander, letzteres passiert nur, falls das Dreieck zu einer Strecke oder einem Punkt entartet.

Die einzige Möglichkeit, dass die H_i auf einer Geraden liegen, ist, dass sie auf einer Seite des Seitenmittendreiecks liegen. Angenommen, H_c liegt zwischen H_a und H_b (Bild b). Dann muss die Seite AC senkrecht auf BC stehen und umgekehrt. Daraus folgt, dass das Dreieck ABC bei Eckpunkt C rechtwinklig ist. Man beachte, dass die Beweisrichtung ohne Weiteres umgekehrt werden kann.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 010916:

Ein Parallelogramm kann man sich als zwei kongruente Dreiecke vorstellen, die an einer Seite zusammen gefügt sind. Es geht bei Drehung um 180° in sich selbst über. Dies muss auch dann so sein, wenn seine Eckpunkte auf einer Kreisperipherie liegen.



Damit die Diagonalen des Parallelogramms aber in sich selbst übergehen, müssen sie Durchmesser des Kreises sein. Daher kann ein zulässiges Parallelogramm nur ein Rechteck $ABCD$ sein. Die dem Rechteck einbeschriebene Figur ist dann ein Rhombus $EFGH$.

Nach dem zweiten Strahlensatz ist dessen Seitenlänge $HE = \frac{1}{2}BD = r$, sein Umfang also $4r = 12$ cm.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier