1. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Saison 1961/1962

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 010831:

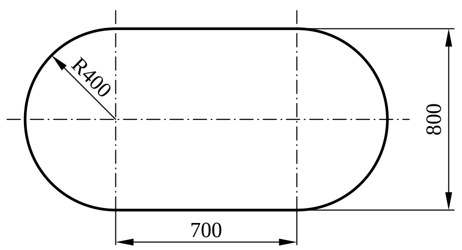
In einem Kreis wurde in einem Quartal der Plan für die Produktion von Mauersteinen (Plan: 1 350 000 Stück) insgesamt mit 100,1 Prozent erfüllt. Eine Überprüfung der Betriebe zeigte, daß dabei zwei Betriebe, die laut Plan 150 000 bzw. 290 000 Stück Mauersteine zu produzieren hatten, den Plan nur mit 80,0 Prozent bzw. 86,2 Prozent erfüllt hatten.

a) Wieviel Mauersteine hätten in diesem Kreis produziert werden können, wenn diese beiden Betriebe ihren Plan mit 100 Prozent erfüllt hätten?

b) Wieviel Prozent hätte in diesem Falle die Planerfüllung für den Kreis betragen?

Aufgabe 010832:

Peter hat für seine Modelleisenbahn ein ”Schienenoval” auf einem Brett aufgebaut (siehe dazu die Skizze; die Kreisbögen sind Halbkreise).



Hans, den er eingeladen hat, fragt plötzlich: ”Was meinst du, fährt der Zug so schnell wie in Wirklichkeit?” Peter antwortet: ”Bestimmt nicht, stell dir doch einmal einen richtigen Zug daneben vor! Unser Zug schafft doch höchstens einen Kilometer in der Stunde!”

”Ja”, sagt Peter, ”das schon, aber 1 km bedeutet ja für die Anlage etwas ganz anderes. Man müßte es umrechnen.” Sie überlegen und ermitteln dann folgende Werte:

Zeit für eine Umkreisung:	11 s
Spurweite der Modellbahn:	18,5 mm
Spurweite in Wirklichkeit:	1 435 mm

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Zuges tatsächlich?

b) Wie groß wäre die Geschwindigkeit vom Standpunkt der Modelleisenbahn?

Aufgabe 010833:

Zu beweisen ist folgender Satz:

Die Summe zweier beliebiger aufeinanderfolgender gerader Zahlen ist nicht durch 4 teilbar!

Welcher Rest bleibt bei Division durch 4 ?

Aufgabe 010834:

Wer hat den Ring?

Ruth, Fritz, Ewald, Brigitte und Erika spielen ein Pfänderspiel. Ruth verläßt das Zimmer; inzwischen versteckt eines der anderen Kinder einen Ring bei sich. Ruth kehrt zurück und soll feststellen, wer den Ring hat. Nun macht jedes Kind drei Aussagen. Von diesen Aussagen sind zwei richtig und eine falsch. Ruth soll auf Grund dieser Aussagen, ohne zu raten, finden, wer den Ring hat.

Ewald:
1. Ich habe den Ring nicht.
2. Fritz hat den Ring.
3. Ich habe dieses Spiel schon oft gespielt.

Fritz:
1. Ich habe den Ring nicht.
2. Ewald irrt sich, wenn er meint, daß ich den Ring habe.
3. Erika hat den Ring.

Jetzt unterbricht Ruth und sagt: "Ich muß nachdenken, vielleicht finde ich jetzt schon, wer den Ring hat." Und nach wenigen Minuten sagt Ruth, wer den Ring hat. Wie konnte sie das feststellen?

Aufgabe 010835:

Gegeben sind die Punkte P und Q mit einem Abstand von 5 cm.

Konstruiere zwei Parallelen, von denen eine durch P, die andere durch Q geht und die voneinander einen Abstand $a = 3\,\text{cm}$ haben!

Begründe die Konstruktion! Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es dabei in der Ebene?

1. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 010831:

a) Der erste Betrieb hätte 20 % von 150 000 Steinen mehr produzieren können, also 30 000 Stück.

   Der zweite Betrieb dagegen 13,8 % von 290 000, also 40 020 Stück.

   Zusammen mit den $1\,350\,000 \cdot 1{,}001 = 1\,351\,350$ tatsächlich produzierten Mauersteinen wären es also 1 421 370 Mauersteine gewesen.

b) Die Planerfüllung hätte dann bei $\frac{1\,421\,370}{1\,350\,000} = 1{,}053 = 105{,}3$ Prozent gelegen.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 010832:

a) Für die tatsächliche Geschwindigkeit des Zuges benötigt man die Länge, die er auf dem Schienenoval zurücklegt. Das sind zwei Strecken und zwei Halbkreisbögen:

$$2 \cdot 700\,\text{mm} + 2\pi \cdot 400\,\text{mm} = 3{,}91\,\text{m}.$$

   Das ergibt eine Geschwindigkeit des Modelleisenbahnzuges von $35,6\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} = 1,28\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

b) 18,5 mm Spurweite auf der Modellbahn entsprechen 1 435 mm Spurweite in der Wirklichkeit. Der Geschwindigkeit des Zuges entsprechen also in Realität

$$\frac{35{,}6\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot 1\,435\,\text{mm}}{18{,}5\,\text{mm}} = 27{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 010833:

Eine gerade Zahl kann stets als $2\,n$ (mit $n \in \mathbb{N}$) geschrieben werden, die darauf folgende gerade Zahl ist dann $2n + 2$. Damit ist $2n + (2n + 2) = 4n + 2$, also ist die Summe nicht durch vier teilbar, sondern läßt den Rest 2. □

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 010834:

Die Idee ist herauszufinden, welche Aussagen von Ewald und Fritz sich widersprechen, da dann eine davon falsch sein muss.

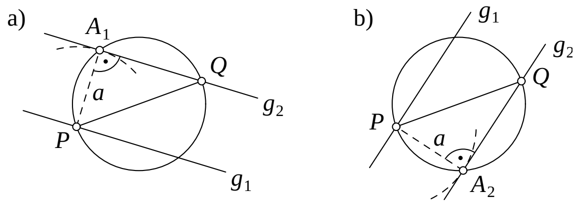
Da Fritz' Aussagen 1 und 2 gleichbedeutend sind, können sie nur gleichzeitig wahr oder falsch sein. Letzteres ist ausgeschlossen, da Fritz nur eine falsche Aussage macht. Also ist seine 3. Aussage falsch; weder er noch Erika haben den Ring.

Ewalds 2. Aussage widerspricht Fritz' erster (die wahr ist), also ist sie falsch.

Also muss Ewalds 1. Aussage stimmen, es bleibt nur noch Brigitte übrig. Folglich hat sie den Ring.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 010835:



I. Analyse:

(Bild) Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck PQA, dessen Hypotenuse $PQ = 5$ cm und dessen Kathete $AP = 3$ cm beträgt. Eine der Parallelen, etwa g_2, geht dann durch A und Q, die andere, $g_1 \parallel g_2$, geht durch Punkt P.

II. Konstruktionsbeschreibung:

Wir zeichnen den Thales-Kreis über dem Durchmesser PQ und schlagen anschließend mit dem Zirkel einen Kreisbogen mit dem Radius a um P. Damit erhalten wir zwei mögliche Punkte A_1 (Bild a) bzw. A_2 (Bild b).

III. Beweis:

Der (stets senkrechte) Abstand beider Parallelen g_1 und g_2 ist durch die Strecke a nach obiger Konstruktion gegeben; P und Q haben ebenfalls den geforderten Abstand.

Beide Paare von Parallelen erfüllen somit die Bedingungen der Aufgabenstellung. □

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Quellenverzeichnis

(15) "a+b = b+a" - Heft 66, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 8 - Dokumentation I.-XVIII. Olympiade (1961-1979), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1979.