1. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Saison 1961/1962

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 010821:

Die Stahlerzeugung ist in der UdSSR bis 1960 gegenüber 1913 (zaristisches Rußland) auf etwa 1 640 Prozent gesteigert worden.

In wieviel Tagen wurde 1960 in der UdSSR genausoviel Stahl erzeugt wie im gesamten Jahr 1913?

Aufgabe 010822:

Für eine große Schmiedepresse wurden als Führungssäulen vier Stahlzylinder mit einem Durchmesser von $d = 512$ mm und einem Gesamtgewicht von $G = 68$ Mp gedreht.

Wie lang ist eine Führungssäule? (Wichte des Stahls $\gamma = 7{,}85\ \mathrm{p/cm^3}$.)

Aufgabe 010823:

In der Messe eines Schiffes unserer Fischereiflotte sitzen die Mitglieder der Besatzung und sprechen über ihr Alter.

> Der Steuermann sagt: ”Ich bin doppelt so alt wie der jüngste Matrose und 6 Jahre älter als der Maschinist.”
>
> Der 1. Matrose sagt: ”Ich bin 4 Jahre älter als der 2. Matrose und ebenso viele Jahre älter als der jüngste Matrose, wie ich jünger bin als der Maschinist.”
>
> Der 2. Matrose sagt: ”Gestern habe ich meinen 20. Geburtstag gefeiert.”

Die Besatzung besteht aus 6 Mitgliedern, das Durchschnittsalter beträgt genau 28 Jahre.

Wie alt ist der Kapitän?

Aufgabe 010824:

Können zwei Sehnen eines Kreises, die nicht Durchmesser sind, einander halbieren? Die Antwort ist zu begründen!

Aufgabe 010825:

Gibt es in einem Drachenviereck, das nicht gleichzeitig Rhombus ist, einen Punkt, dessen Abstände von den vier Seiten einander gleich sind? Wenn ja, dann konstruiere diesen Punkt und beweise, daß er die angegebene Eigenschaft hat!

1. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 010821:
Die Stahlerzeugung der UdSSR im Jahr 1960 entspricht 1 640 Prozent der Jahresproduktion von 1913, d.h. der Produktion innerhalb von 366 Tagen. Die gesamte Jahresproduktion von 1913, also 100 Prozent, werden dann an $100 : 1\,640 \cdot 366$ Tagen ≈ 22 Tagen im Jahr 1960 erzeugt.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 010822:
Jeder der vier Stahlzylinder hat ein Gewicht G_1 von $\frac{1}{4} \cdot 68$ Mp $= 17$ Mp. Für dieses Gewicht gilt $G_1 = \gamma \cdot \pi r^2 h$, d. h. Wichte mal Zylindervolumen. Umstellen nach der Höhe ergibt:

$$h = \frac{G_1}{\gamma \pi r^2} = \frac{1{,}7 \cdot 10^7 \text{ p}}{(7{,}85 \text{ p/cm}^3) \cdot \pi \cdot (25{,}6 \text{ cm})^2} = 1\,051{,}8 \text{ cm} \approx 10{,}5 \text{ m}.$$

Eine Führungssäule ist rund 10,5 m lang.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 010823:
Es empfiehlt sich, Bezeichnungen für das Alter der Beteiligten einzuführen: k, s, m, m_1, m_2 und m_j seien das Alter des Kapitäns, des Steuermanns, des Maschinisten sowie des 1., 2. und des jüngsten Matrosen. Die Aussagen ergeben nun folgendes Gleichungssystem:

Steuermann:	$s = 2m_\text{j} = m + 6,$	(1)
1. Matrose:	$m_1 = m_2 + 4,$	(2)
1. Matrose:	$m_1 - m_\text{j} = m - m_1,$	(3)
2. Matrose:	$m_2 = 20,$	(4)
Durchschnitt:	$k + s + m + m_1 + m_2 + m_\text{j} = 6 \cdot 28 = 168.$	(5)

Aus (4) und (2) folgt $m_1 = 24$, daraus und aus (3) folgt $m_\text{j} = 2m_1 - m = 48 - m$, letzteres in (1) eingesetzt ergibt $m = 30$ und $s = 36$. Diese Ergebnisse schließlich in (5) eingesetzt, führt auf

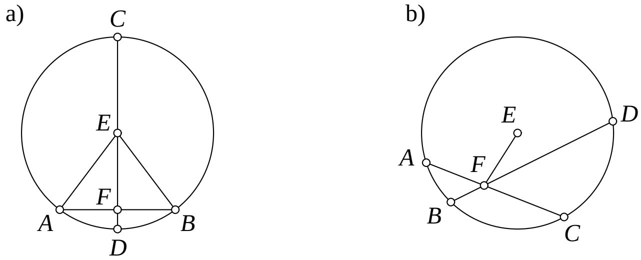
$$k + 36 + 30 + 24 + 20 + 18 = 168 \qquad \Longrightarrow \qquad k = 40.$$

Der Kapitän ist somit 40 Jahre alt.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 010824:
Beweis: Zwei Strecken, die sich schneiden, legen eindeutig ein Viereck fest, das diese Strecken als Diagonalen besitzt. Ein Viereck, dessen Diagonalen einander halbieren, ist ein Parallelogramm. Ein in einen Kreis

einbeschriebenes Parallelogramm ist stets ein Rechteck. Dessen Diagonalen wiederum sind Durchmesser des Kreises, also ist die Antwort: nein. □



Alternativer Beweis: EUKLID[1)] (ca. 365–300 v. Chr.) beweist diese Behauptung wie folgt. Zunächst wird gezeigt:

> *III.3: Wenn ein Durchmesser eines Kreises eine andere Sehne, die nicht durch den Mittelpunkt des Kreises geht, halbiert, schneidet sie diese unter rechten Winkeln.*

Beweis: (Bild a) CD sei der Durchmesser des Kreises ABC mit Mittelpunkt E, die Sehne, die nicht durch den Mittelpunkt geht, sei AB. Man ziehe die Radien EA und EB, der Schnittpunkt von AB und CD sei F. Dann ist nach Voraussetzung $AF = FB$; die Strecke FE den beiden Dreiecken AFE und BFE gemeinsam; die beiden Seiten AF, FE sind den beiden Seiten BF, FE jeweils gleich; und die Basis EA ist gleich der Basis EB; deshalb ist der Winkel AFE gleich dem Winkel BFE. Wenn aber eine Strecke eine andere Strecke so schneidet, dass die benachbarten Schnittwinkel untereinander gleich sind, heißt jeder dieser Winkel ein rechter Winkel; deshalb ist jeder der Winkel AFE und BFE ein rechter Winkel. □

Dieser Satz wird benutzt, um die Behauptung der Aufgabe zu beweisen:

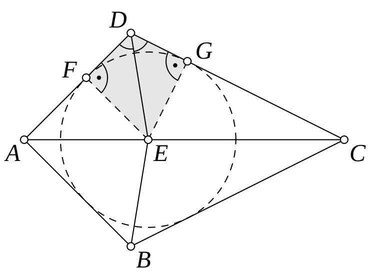
> *III.4: Wenn in einem Kreis zwei Sehnen einander schneiden, welche nicht durch den Mittelpunkt des Kreises gehen, dann können sie sich nicht gegenseitig halbieren.*

Indirekter Beweis: (Bild b) Angenommen, AC und BD seien die beiden Sehnen, die nicht durch den Mittelpunkt E gehen und deren Schnittpunkt F sei, so dass $AF = FC$ und $BF = FD$ gilt. Man ziehe EF; diese Strecke durch den Mittelpunkt halbiert dann die Sehne AC, die nicht Durchmesser ist, nach III.3 unter einem rechten Winkel, d. h. Winkel EFA ist ein rechter Winkel. Ferner halbiert EF auch die Sehne BD, die ebenfalls nicht Durchmesser ist, unter einem rechten Winkel EFB. Daher sind beide Winkel EFA und EFB gleich, welches aber für unterschiedliche Sehnen unmöglich ist. Daher halbieren sich die Sehnen AC und BD nicht. □

[1)] Aus *Euklids Elemente*, dem nach der Bibel am weitesten verbreiteten Buch überhaupt, hier Buch III.3 und III.4, wobei möglichst originalgetreu zitiert wird.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 010825:



Analysis und Konstruktion:

(Bild) Aus Symmetriegründen muss der gesuchte Punkt E auf der Diagonalen AC des Drachenvierecks $ABCD$ liegen. Auf dieser ist es genau der Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ADC$ bzw. $\sphericalangle ABC$.

Beweis:

Punkte auf einer Winkelhalbierenden haben von beiden Schenkeln des Winkels stets den gleichen senkrechten Abstand. Das zeigt man, indem zwei rechtwinklige Dreiecke DFE und DGE betrachtet werden:

die Winkelhalbierende DE als gemeinsame Seite, die gleichen Winkel $\sphericalangle FDE = \sphericalangle GDE$ sowie die ebenfalls gleichen rechten Winkel $\sphericalangle DFE = \sphericalangle DGE = 90°$. Damit sind auch die dritten Winkel gleich und die beiden Dreiecke nach WSW kongruent.

Die Lote $EF = EG$ (die gleichzeitig die gesuchten Abstände sind) haben demzufolge die gleiche Länge. Somit ist Punkt E der *Inkreismittelpunkt* des Drachenvierecks. □

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Quellenverzeichnis

(15) "a+b = b+a" - Heft 66, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 8 - Dokumentation I.-XVIII. Olympiade (1961-1979), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1979.