1. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Saison 1961/1962

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 010811:

Berechne:

$$\left(1\tfrac{2}{3}cd + \tfrac{25}{4}dg - 2\tfrac{1}{2}d\right) : 5d - \left(\tfrac{7}{2}mn - 1\tfrac{1}{4}ng + \tfrac{3}{4}n\right) : \left(-\tfrac{3}{8}n\right).$$

Aufgabe 010812:

In diesem Jahr werden in der UdSSR 8,3 Milliarden Meter Stoffe gewebt. Jemand behauptet, daß man damit die ganze Bahnlänge des Mondes um die Erde „auslegen“ könnte. Hat er recht? (Die Mondbahn sei als Kreisbahn angenommen. Der mittlere Abstand des Mondes von der Erde beträgt 384 000 km.)

Aufgabe 010813:

Wenn die Summe von 4 beliebigen natürlichen (positiven ganzen) Zahlen eine ungerade Zahl ist, so ist ihr Produkt eine gerade Zahl.

Probiere es! Beweise die Behauptung!

Aufgabe 010814:

Setze in ein „magisches Quadrat“ mit 9 Feldern die Zahlen von 3 bis 11 so ein, daß die Summe jeder Reihe, jeder Spalte und jeder Diagonalen 21 beträgt! Beginne mit dem Mittelfeld!

Begründe deine Anordnung der Zahlen!

Aufgabe 010815:

Bei einem mehradrigen Kabel werden Adern gleichen Durchmessers um eine Mittelader vom gleichen Durchmesser so angeordnet, daß sie einander berühren.

a) Wieviel Adern braucht man?

b) Beweise diese Behauptung!

Aufgabe 010816:

Es ist ein Kreis zu konstruieren, der eine gegebene Gerade g in dem gegebenen Punkt B berührt und durch einen gegebenen Punkt A geht, der nicht auf g liegt.

Begründe die Konstruktion!

1. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 010811:

$$\begin{aligned}
&\left(1\tfrac{2}{3}cd + \tfrac{25}{4}dg - 2\tfrac{1}{2}d\right) : 5d - \left(\tfrac{7}{2}mn - 1\tfrac{1}{4}ng + \tfrac{3}{4}n\right) : \left(-\tfrac{3}{8}n\right)\\
&= \tfrac{1}{5}\left(1\tfrac{2}{3}c + \tfrac{25}{4}g - 2\tfrac{1}{2}\right) - \left(-\tfrac{8}{3}\right)\left(\tfrac{7}{2}m - 1\tfrac{1}{4}g + \tfrac{3}{4}\right)\\
&= \left(\tfrac{5}{5\cdot 3}c + \tfrac{25}{5\cdot 4}g - \tfrac{5}{5\cdot 2}\right) + \left(\tfrac{8\cdot 7}{3\cdot 2}m - \tfrac{8\cdot 5}{3\cdot 4}g + \tfrac{8\cdot 3}{3\cdot 4}\right)\\
&= \left(\tfrac{1}{3}c + 1\tfrac{1}{4}g - \tfrac{1}{2}\right) + \left(9\tfrac{1}{3}m - 3\tfrac{1}{3}g + 2\right)\\
&= \tfrac{1}{3}c + 9\tfrac{1}{3}m - 2\tfrac{1}{12}g + 1\tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 010812:

Die Länge der Mondbahn ist der Umfang eines Kreises mit dem Radius 384 000 km, d.h. $2\pi \cdot 384\,000$ km $\approx$ 2 413 000 000 m, also weniger als ein Drittel der Stoffbahn.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 010813:

Es gilt zum Beispiel $2 + 3 + 5 + 7 = 17$ und $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

Zum *Beweis:* Damit die Summe von vier natürlichen Zahlen ungerade ist, muss wenigstens ein Summand gerade sein (die Summe von vier ungeraden Zahlen ist nämlich gerade). Wenn ein Summand gerade ist, wird das Produkt der Summanden auch gerade sein.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 010814:

6	11	4
5	7	9
10	3	8

Eine Lösung ist abgebildet, andere sind möglich.

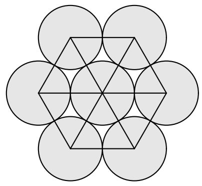
Im Mittelfeld muss 7 stehen, da diese Zahl mit allen anderen addiert wird und sonst die 11 oder 3 nicht verwendet werden können (die Zwischensumme $11 + 7 = 18$ ist bereits zu groß bzw. $3 + 4 = 7$ ist zu klein).

Die Zahlen 11 und 3 dürfen nur zweimal in einer Summe auftreten, da außer $10 + 8 + 3 = 11 + 7 + 3 = 11 + 6 + 4 = 21$ keine Kombinationen möglich sind. Sie können daher nicht an den Ecken stehen.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 010815:

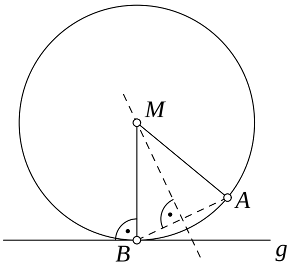
Man denke sich einen durch die Adern senkrecht zur Aderachse gelegten ebenen Schnitt. Dann lautet die Frage: Wieviel Kreise gleichen Durchmessers lassen sich um einen gleichgroßen Innenkreis anordnen, so dass sie einander berühren?



Da der Abstand jedes Kreismittelpunktes von den Mittelpunkten der Nachbarkreise stets $2r$ beträgt, entstehen aus den Verbindungslinien der Kreismittelpunkte 6 gleichseitige Dreiecke, die ein regelmäßiges Sechseck bilden. Man braucht also einschließlich der Mittelader 7 Adern.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 010816:



Damit der Kreis die Gerade g berührt, muss der Mittelpunkt M des Kreises auf der Senkrechten zu g in B liegen.

Damit M von den Punkten A und B den gleichen Abstand hat, muss er ferner auf der Mittelsenkrechten zur Strecke AB liegen.

Jede Bedingung führt also auf eine Gerade; der Schnittpunkt der beiden existiert wegen $A \notin g$ und ist somit der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Quellenverzeichnis

(15) "a+b = b+a" - Heft 66, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 8 - Dokumentation I.-XVIII. Olympiade (1961-1979), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1979.