# 1. Mathematik Olympiade
# 2. Stufe (Kreisolympiade)
# Klasse 7
# Saison 1961/1962

Aufgaben und Lösungen

# 1. Mathematik-Olympiade
# 2. Stufe (Kreisolympiade)
# Klasse 7
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 010721:

Der Kapitalismus hat zur Folge, daß einer Handvoll industriell hochentwickelter Länder eine große Anzahl sehr schwach entwickelter Länder gegenüberstehen, die durch die imperialistischen Mächte ausgebeutet und ausgeplündert werden.

So erzeugten die hoch entwickelten Länder bei einer Bevölkerungszahl von 603 000 000 Menschen im Jahre 1959 insgesamt 204 000 000 t Stahl und 1 604 Milliarden Kilowattstunden Elektroenergie.

Die schwach entwickelten Länder erzeugten im gleichen Jahr bei einer Bevölkerungszahl von 1 283 000 000 Menschen nur 6 000 000 t Stahl und 120 Milliarden Kilowattstunden Elektroenergie.

Wieviel Stahl und wieviel Kilowattstunden hätten die schwach entwickelten Länder erzeugen müssen, wenn sie im Verhältnis zu ihrer Bevölkerungszahl genau so viel produziert hätten wie die imperialistischen Mächte?

Aufgabe 010722:

Die Eisenbahnstrecke Leipzig - Halle - Köthen - Magdeburg ist $123,6\,\text{km}$ lang. Ein Personenzug fährt um 12.32 Uhr in Leipzig ab. Er hat eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $32,7\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein D-Zug fährt um 13.11 Uhr in Leipzig ab. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt $75,2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Um wieviel Uhr holt der D-Zug den Personenzug ein?

b) Wieviel Kilometer haben beide Züge bis dahin zurückgelegt?

Aufgabe 010723:

Es ist zu beweisen, daß in einem beliebigen Trapez die Dreiecke, die aus den Diagonalenabschnitten und den Schenkeln des Trapezes gebildet werden, flächengleich sind.

Aufgabe 010724:

In einer Ebene sind eine Gerade $g$ und zwei Punkte $A$ und $B$ gegeben, die nicht auf $g$ liegen.

Konstruiere alle Punkte $P$, die von $g$ jeweils $3\,\text{cm}$ Abstand haben und für die $AP = BP$ ist! Begründe die Konstruktion!

Aufgabe 010725:

Wenn man einen Würfel auf den Tisch stellt, dann sind von seinen 6 Flächen nur noch 5 Flächen sichtbar. Nun sollen drei Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 20\,\text{cm}$, $a_2 = 10\,\text{cm}$ und $a_3 = 4\,\text{cm}$ der Größe nach übereinandergestellt werden. Der größte Würfel steht zuunterst auf der Tischplatte. Die Mittelpunkte der Würfel stehen genau übereinander.

Wie groß ist die gesamte sichtbare Fläche aller drei Würfel?

# 1. Mathematik-Olympiade
# 2. Stufe (Kreisolympiade)
# Klasse 7
# Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 010721:

Zuerst rechnet man die Pro-Kopf-Produktion in den hoch entwickelten Ländern aus.

Stahl: 204 000 000 t : 603 000 000 = 0,338 t/Person,
Energie: 1 604 000 000 000 kWh : 603 000 000 = 2 660 kWh/Person.

Diese Werte multipliziert man mit der Anzahl der Menschen in den schwach entwickelten Ländern und stellt fest, dass sie etwa 434 000 000 t Stahl und 3 413 Mrd. kWh Energie hätten produzieren müssen.

*Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (14)*

Lösung 010722:

Gesucht ist diejenige Wegstrecke ist, die beide Züge bis zum Einholen zurücklegen. Diese Wegstrecke ist das Produkt aus mittlerer Geschwindigkeit und jeweils benötigter Zeit. Die Fahrzeiten, die die beiden Züge bis dahin benötigen, unterscheiden sich um 39 min = $\frac{13}{20}$ h (nämlich der Unterschied zwischen den Abfahrtszeiten).

Die Gleichung ist also, wenn $t$ die Fahrzeit des D-Zuges bezeichnet:

$$t \cdot 75,2\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = (t + \frac{13}{20}\text{h}) \cdot 32,7\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = t \cdot 32,7\,\frac{\text{km}}{\text{h}} + 21,255\text{ km}.$$

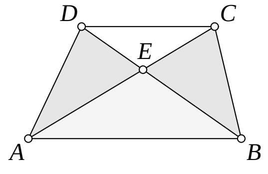
a) Daraus errechnet sich $t = 0{,}5$ h = 30 min. Der D-Zug holt den Personenzug eine halbe Stunde nach 13.11 Uhr, also um 13.41 Uhr ein.

b) Zu diesem Zeitpunkt haben beide Züge 37,6 km zurückgelegt.

*Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (14)*

Lösung 010723:

*Beweis:*

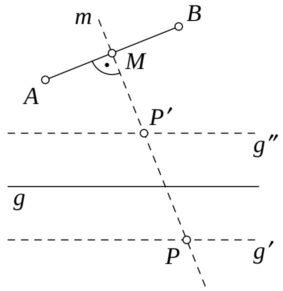



Seien die Eckpunkte des Trapezes $A, B, C$ und $D$, wobei $AB \parallel CD$ gelte. Dann sind die Dreiecke $ABC$ und $ABD$ flächengleich, da sie die Grundseite $AB$ und die Höhe (d.h. den Abstand der parallelen Seiten) gemeinsam haben. Beide Dreiecke enthalten das Dreieck $ABE$, wobei $E$ der Diagonalenschnittpunkt sei.

Wenn man von den Flächen von $ABC$ bzw. $ABD$ jeweils die Fläche von $ABE$ wegnimmt, müssen die übrig bleibenden Flächen von $AED$ und $BEC$ auch gleich groß sein. Diese sind aber genau die beiden Dreiecke, deren Flächengleichheit zu zeigen ist.

*Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (14)*

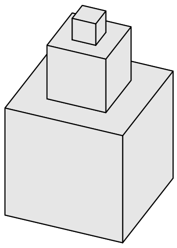
Lösung 010724:




*Konstruktion:* Man errichte die Mittelsenkrechte $m$ zur Strecke $AB$, um alle Punkte mit $AP = BP$ zu erhalten. Dann konstruiere man die Parallelen $g'$ und $g''$ auf beiden Seiten zu $g$ im Abstand von 3 cm. Die Schnittpunkte von $m$ mit $g'$ bzw. $g''$ sind die beiden gesuchten Punkte $P$ bzw. $P'$.
*Beweis:* Sei $M$ der Mittelpunkt der Strecke $AB$. Dann gilt $AMP \cong BMP$ nach Kongruenzsatz SWS. Ausserdem haben alle Punkte auf $g'$ und $g''$ denselben geforderten Abstand zur Geraden $g$. Die Schnittpunkte $P$ und $P'$ erfüllen somit beide Forderungen der Aufgabenstellung.

*Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (14)*

Lösung 010725:



(Bild) Von jedem Würfel sind fünf Seitenflächen zu sehen (nämlich alle außer der Unterseite), abzüglich der überdeckten Oberseiten der beiden unteren Würfel (die ihrerseits so groß sind wie die Unterseiten der darauf gestellten Würfel). Die sichtbare Fläche beträgt also

$$5a_1^2 + 5a_2^2 + 5a_3^2 - a_2^2 - a_3^2 = 5a_1^2 + 4a_2^2 + 4a_3^2 = 2\,464\ \text{cm}^2.$$

*Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (14)*

## Quellenverzeichnis

**(14)** "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.