34. Mathematik Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12
Saison 1994/1995

Aufgaben

34. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 341241:

Man beweise: Wenn für eine von Null verschiedene reelle Zahl x die Zahl $x + \frac{1}{x}$ eine ganze Zahl ist, dann ist für dieses x und jede positive ganze Zahl n auch $x^n + \frac{1}{x^n}$ eine ganze Zahl.

Aufgabe 341242:

Im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC werde ein Punkt P beliebig gewählt. Die Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA, AB seien in dieser Reihenfolge mit X, Y, Z bezeichnet.

Man beweise, daß die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke BXP, CYP, AZP nicht von der Wahl des Punktes P abhängt.

Aufgabe 341243:

Man beweise, daß für alle ganzen Zahlen k und n mit $1 \leq k \leq 2n$ die Ungleichung

$$\binom{2n+1}{k-1} + \binom{2n+1}{k+1} \geq 2 \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \binom{2n+1}{k} \quad \text{gilt.}$$

Hinweis: Für ganze Zahlen n und k mit $0 \leq k \leq n$ definiert man $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, wobei für ganze Zahlen m mit $m \geq 0$ definiert wird: $m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$ [ausführlicher: $0! = 1$ sowie $m! = (m-1)! \cdot m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$].

Aufgabe 341244:

Über ein Dreieck ABC und zwei Punkte D, E werde vorausgesetzt:

D liegt auf der Strecke BC und ist von C verschieden, E liegt auf der Strecke AC und ist von C verschieden. Die Strecke DE geht durch den Inkreismittelpunkt M des Dreiecks ABC. Der Inkreisradius des Dreiecks ABC sei r, der Flächeninhalt des Dreiecks CDE sei F.

Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets $F \geq 2r^2$ gilt.

Aufgabe 341245:

Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ nichtnegativer ganzer Zahlen x, y, für die

$$x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3 \quad \text{gilt.}$$

Aufgabe 341246A:

Zu gegebenen positiven ganzen Zahlen a und b sei $(x_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ diejenige Zahlenfolge, die durch

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = ax_n + b \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

definiert ist.

Man beweise: Für jede Wahl von a und b enthält die so gebildete Folge unendlich viele Zahlen, die keine Primzahlen sind.

Aufgabe 341246B:

Zwei Personen P und Q spielen das folgende Spiel:

In der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ belegt zunächst P, danach Q und schließlich wieder P je einen noch nicht belegten der drei Koeffizienten a, b, c mit einer reellen Zahl. Das Spiel ist genau dann für P gewonnen, wenn die so entstandene Gleichung drei paarweise verschiedene reelle Lösungen hat.

Man untersuche, ob P bei jeder Spielweise von Q den Gewinn erzwingen kann.