34. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 12
Saison 1994/1995

Aufgaben

34. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 341231:

Man beweise, daß für alle positiven reellen Zahlen x, y, z die Ungleichung

$$\frac{1}{1+x+\frac{1}{y}}+\frac{1}{1+y+\frac{1}{z}}+\frac{1}{1+z+\frac{1}{x}} \leq 1 \quad \text{gilt.}$$

Aufgabe 341232:

Im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC werde ein Punkt P beliebig gewählt. Die Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA, AB seien in dieser Reihenfolge mit X, Y, Z bezeichnet.

Man beweise, daß die Summe der Längen x, y, z der Strecken BX, CY, AZ nicht von der Wahl des Punktes P abhängt.

Aufgabe 341233A:

Man ermittle alle diejenigen Paare $(x,\, y)$ reeller Zahlen x, y, die die folgenden Gleichungen (1) und (2) erfüllen:

$$\sin^4 x = y^4 + x^2y^2 - 4y^2 + 4, \tag{1}$$
$$\cos^4 x = x^4 + x^2y^2 - 4x^2 + 1. \tag{2}$$

Aufgabe 341233B:

Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen definiert sind und für alle reellen x und y den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) - f(x) - f(y) + 2, \tag{1}$$
$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1, \tag{2}$$
$$f(1) = 2. \tag{3}$$

Aufgabe 341234:

Man ermittle die kleinste natürliche Zahl n mit $n \geq 2$ und der folgenden Eigenschaft (*):

(*) In jeder Menge von n natürlichen Zahlen gibt es (mindestens) zwei Zahlen, deren Summe oder deren Differenz durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 341235:

Man beweise: Wenn in einem Tetraeder $OABC$ die Seitenflächen OAB, OBC, OCA rechtwinklige Dreiecke mit den rechten Winkeln bei O sind, so gilt für die Längen $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$ und für die Länge h der auf ABC senkrechten Höhe des Tetraeders die Ungleichung

$$h \leq \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Aufgabe 341236:

Man ermittle für jede ungerade natürliche Zahl $n \geq 3$ die Zahl

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2-3}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}}\right].$$

Hinweis: Ist z eine reelle Zahl, so bezeichnet $[z]$ diejenige ganze Zahl $g = [z]$, für die $g \leq z < g + 1$ gilt.