



34. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionale)
Klasse 9
Saison 1994/1995

Aufgaben





34. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 340921:

Die Bewohner des Planeten Trion unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau drei verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau drei Völkerstämme. Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau drei Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.

Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 9 Sitze in quadratförmiger Formierung zu drei Zeilen und drei Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und jeder Spalte müssen alle drei Völkerstämme und alle drei Geschlechter vertreten sein.

Geben Sie eine mögliche Sitzordnung an und bestätigen Sie, daß bei dieser Sitzordnung alle genannten Bedingungen erfüllt sind!

Aufgabe 340922:

Jonas beschäftigt sich mit der Lösung des Kryptogramms

$$\begin{array}{r}
 \text{E I N S} \\
 + \text{A C H T} \\
 \hline
 = \text{N E U N} \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

d.h., er versucht, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine (im dekadischen Positionssystem) richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Ferner ist auch die Regel einzuhalten, daß in jeder Zeile als Anfangsziffer nicht die Ziffer Null auftritt.

Nach einer Stunde behauptet Jonas, er habe immerhin schon 25 verschiedene Lösungen gefunden. Felix bezweifelt, daß es überhaupt so viele verschiedene Lösungen gibt.

Hat Felix mit seinem Zweifel recht?

Aufgabe 340923:

Ausgehend von einem Quadrat $ABCD$ kann man für je zwei positive ganze Zahlen x und y die folgenden Konstruktionen ausführen:

- Die Seite AB wird über B hinaus um die Länge $x \cdot \overline{AB}$ bis zum Punkt S verlängert,
- die Seite BC wird über C hinaus um die Länge $y \cdot \overline{BC}$ bis zum Punkt T verlängert,
- die Seite CD wird über D hinaus um die Länge $x \cdot \overline{CD}$ bis zum Punkt U verlängert,
- die Seite DA wird über A hinaus um die Länge $y \cdot \overline{DA}$ bis zum Punkt V verlängert.

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ positiver ganzer Zahlen, für die das so erhaltende Viereck $STUV$ einen genau 11 mal so großen Flächeninhalt wie das Quadrat $ABCD$ hat!



Aufgabe 340924:

Über der Seite AB des gleichseitigen Dreiecks ABC mit gegebener Seitenlänge a werde nach außen das Quadrat $ABPQ$ errichtet. Anschließend stellt man sich dieses Quadrat beweglich vor. Es soll in mathematisch positivem Drehsinn um das Dreieck ABC herum "rollen, ohne zu gleiten". (Zu Anfang bleibt also nur der Punkt B fest, die anderen Punkte bewegen sich, bis die Strecke BP in die Lage von BC kommt; dann bleibt C fest u.s.w.).

- a) Auf diese Weise werde das Quadrat so lange gerollt, bis es zum ersten Mal wieder eine mit AB zusammenfallende Seite hat (dies muß nicht die Seite sein, die zu Anfang AB war).

Wie lang ist dabei der Weg, den

- der Punkt A ,
- der Mittelpunkt M des Quadrates $ABCD$,
- der Mittelpunkt H der Seite AB des Quadrates

zurücklegt?

- b) Ausgehend von dem Anfangszustand $ABPQ$ wurde nicht nur eine in a) beschriebene "volle Umrundung des Dreiecks ABC " durchgeführt, sondern in Fortsetzung hierzu wurde das Quadrat weitergerollt. Dies wurde erst dann beendet, als zum ersten Mal jeder der vier Punkte A, B, P, Q seine ursprüngliche Lage wieder erreicht hatte.

- Wie viele volle Umrundungen des Dreiecks ABC fanden vom Anfangszustand bis zum geschilderten Ende dabei insgesamt statt?
- Wie viele volle Umdrehungen des Quadrats, bezogen auf seinen eigenen Mittelpunkt M wurden dabei insgesamt ausgeführt?