34. Mathematik Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 8
Saison 1994/1995

Aufgaben

34. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340841:

Die Bewohner des Planeten Quadron unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau vier verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau vier Völkerstämme. Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau vier Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.

Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 16 Sitze in quadratförmiger Formierung zu vier Zeilen und vier Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und in jeder Spalte müssen alle vier Völkerstämme und alle vier Geschlechter vertreten sein.

Gib eine mögliche Sitzordnung an und bestätige, daß bei dieser Sitzordnung alle genannten Bedingungen erfüllt sind!

Aufgabe 340842:

Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen!

(1) Die Zahl n ist das Produkt von genau drei Primzahlen; je zwei dieser Primzahlen sind voneinander verschieden; jede dieser Primzahlen ist größer als 10.

(2) Die Zahl n kann als Produkt von zwei natürlichen Zahlen dargestellt werden, deren Summe 600 beträgt. Die Zahl n kann aber auch als das Produkt von zwei natürlichen Zahlen dargestellt werden, deren Summe 240 beträgt.

Aufgabe 340843:

Auf einem Zeichenblatt seien drei Punkte A, B, C mit $A \neq B$, $A \neq C$ und $B \neq C$ gegeben. Gesucht sind zwei einander gleichgroße, voneinander verschiedene Kreise, von denen einer durch A, der andere durch C geht und die sich im Punkt B berühren.

Beschreibe Lagemöglichkeiten der gegebenen Punkte A, B, C, bei denen es

a) keine solchen Kreise,

b) mehr als ein Paar solcher Kreise,

c) genau ein Paar solcher Kreise gibt!

Zu (a) zeige, warum es keine solchen Kreise gibt; zu (b) bzw. (c) beschreibe und begründe je eine Konstruktion, mit der man aus den gegebenen Punkten mehrere derartige Kreispaare bzw. das eine derartige Kreispaar erhalten kann! Führe die von dir beschriebene Konstruktion durch! Wähle hierzu A, B, C jeweils in passender Lage für (b) bzw. (c) und konstruiere aus diesen A, B, C bei (b) zwei Kreispaare, bei (c) das eine Kreispaar!

Aufgabe 340844 = 340944:

Axel führt einen Kartentrick vor. Er benutzt dazu ein Skatspiel, bestehend aus jeweils 4 Karten der folgenden Arten, denen er folgende Augenwerte zuteilt:

Art der Karte	7	8	9	10	Bube	Dame	König	As
Augenwert	7	8	9	10	2	3	4	11

Seine Freunde sollen, während er nicht im Zimmer ist, nach folgender Vorschrift Kartenstapel bilden:

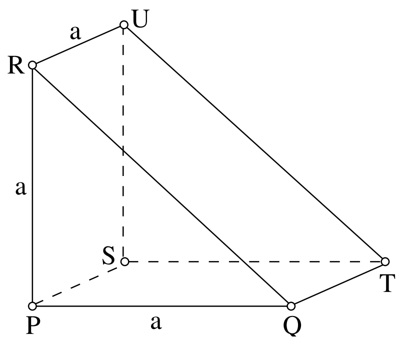
Für jeden Stapel wird zunächst eine Karte offen hingelegt, und der damit beginnende Stapel erhält so viele Punkte, wie der Augenwert dieser Karte angibt. Dann werden weitere Karten verdeckt auf den Stapel gelegt; für jede dieser Karten wird die Punktzahl des Stapels um 1 erhöht. Dies wird aber nur so lange durchgeführt, bis die Punktzahl 11 erreicht ist; der Stapel ist damit abgeschlossen. Er wird dann umgedreht, so daß die bisher unterste Karte nun verdeckt oben liegt.

1. Beispiel: 7 offen hinlegen vier Karten verdeckt darauf legen, Stapel umdrehen.
2. Beispiel: As offen hinlegen, umdrehen.

Solche Stapel werden einige Male gebildet und nebeneinander auf den Tisch gelegt. Falls am Ende Karten übrig bleiben, werden diese "Restkarten" einzeln abzählbar und verdeckt neben den Stapel gelegt.

Dann wird Axel herein gerufen. Er behauptet, er könne aus der Anzahl der fertigen Stapel und der Anzahl der Restkarten die Summe der Augenwerte der nunmehr obersten Karten der Stapel finden. Wie ist das möglich?

Aufgabe 340845:



Es sei $PQRSTU$ ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck PQR ist (siehe Abbildung). Die Höhenlänge des Prismas sei gleich der Kathetenlänge a des Dreiecks PQR.

Gesucht ist eine Ebene E, die parallel zu einer der quadratförmigen Seitenflächen F des Prismas verläuft und das Prisma in zwei Teilkörper zerlegt, deren Volumina sich in irgend einer Reihenfolge wie $9 : 16$ verhalten.

Ermittle zu gegebenen a alle diejenigen Werte, die der Abstand zwischen der Seitenfläche F und einer solchen Ebene E betragen kann!

Aufgabe 340846:

Wie viele Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, die die Ungleichung

$$|x - 30| + |y - 10| < 100$$

erfüllen, gibt es insgesamt?