34. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 8
Saison 1994/1995

Aufgaben

34. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340831:

Auf 10 Kärtchen sind die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 geschrieben, jede Ziffer auf genau einem Kärtchen. Anna wählt drei dieser Kärtchen und legt sie zweimal hintereinander auf den Tisch, das erste Mal als Zifferndarstellung der größten, das zweite Mal als Zifferndarstellung der zweitgrößten mit diesen drei Kärtchen erreichbaren Zahl.

Anna berichtet: Die Summe der beiden Zahlen, deren Zifferndarstellungen sie gelegt hat, beträgt 1 233. Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche zwei Zahlen Anna hiernach gelegt haben kann!

Aufgabe 340832:

Lehrer Lehmann befragt die 26 Schüler seiner Klasse, in welchen der drei Arbeitsgemeinschaften, die in dieser Klasse besucht werden, sie sind. Wahrheitsgemäß ergibt sich:

- Auf die Frage, wer in der Arbeitsgemeinschaft Fotografie sei, melden sich genau 10 Schüler.
- Auf die Frage, wer in der Arbeitsgemeinschaft Technik sei, melden sich genau 8 Schüler.
- Auf die Frage, wer in der Arbeitsgemeinschaft Informatik sei, melden sich genau 7 Schüler.
- Genau 6 Schüler melden sich bei keiner dieser drei Fragen.

Auf dem Heimweg meint Uwe: "Genau 3 Schüler sind in allen drei Arbeitsgemeinschaften."

Michael meint: "Genau 2 Schüler sind in genau je zwei der Arbeitsgemeinschaften."

Jörg meint: "Genau 14 Schüler sind in genau je einer Arbeitsgemeinschaft."

Zeige, daß alle drei Meinungen falsch sind!

Aufgabe 340833:

Für vier Punkte A, B, C, D in einer Ebene werde vorausgesetzt:

$$\overline{AB} = 6\text{ cm}, \qquad \overline{AD} = 1\text{ cm und} \qquad \overline{AB} + \overline{BD} = 11\text{ cm}. \qquad (*)$$

Gesucht werden zwei Längenangaben x und y so, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für je vier Punkte, die die Voraussetzung (*) erfüllen, gilt stets $x \le \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} \le y$.

(2) Wenn außer (*) auch $x = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$ gilt, liegen A, B, C, D auf einer gemeinsamen Geraden.

(3) Wenn außer (*) auch $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = y$ gilt, liegen A, B, C, D auf einer gemeinsamen Geraden.

Nenne zwei Längen x, y und beweise, daß sie diese Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

Aufgabe 340834:

Ein Schachturnier wurde in "Runden" ausgetragen. Diese Runden - anders als weithin üblich - so eingerichtet, daß in jeder Runde jeder Teilnehmer des Turniers genau eine Partie zu spielen hatte (es nahm also eine gerade Zahl von Spielern teil) und daß im gesamten Turnier für jeden Teilnehmer gegen jeden anderen genau eine Partie angesetzt wurde.

Michael und Robert nahmen 5 Runden lang an diesem Turnier teil, danach mußten sie leider ausscheiden. Um den übrigen Turnierablauf nicht weiter zu ändern, ließ man die Partien, die sie nach dem Turnierplan dann eigentlich noch zu spielen gehabt hätten, einfach ausfallen.

Michael erzählte seinen Freunden Herbert und Gerd, daß daher in dem gesamten Turnier (in dem sonst keine weiteren Ausfälle gab) insgesamt 38 Partien gespielt worden seien. Herbert meinte: "Diese Anzahl ist nicht möglich." Gerd entgegnet: "Doch, und wenn sie die richtige ist, so ist durch Michaels Angaben sogar eindeutig bestimmt, ob Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt haben."

Untersuche, ob Herberts oder Gerds Meinung zutrifft! Wenn Gerds Meinung zutrifft, haben dann Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt?

Aufgabe 340835:

Auf dem Rand eines Quadrates $ABCD$ mit gegebener Seitenlänge a seien P_1, P_2, P_3 die folgenden Punkte: Es liege P_1 so auf BC, daß $\overline{BP_1} = \overline{P_1C}$ gilt, P_2 so auf CD, daß $\overline{P_2D} = 3 \cdot \overline{CP_2}$ gilt, P_3 so auf DA, daß $\overline{P_3A} = 3 \cdot \overline{DP_3}$.

Ein Punkt X bewegt sich auf den Strecken P_1B, BA, AP_3 von P_1 nach P_3. Gesucht sind auf diesem Weg (einschließlich seines Anfangs- und Endpunktes) alle diejenigen Punkte X, für die der Flächeninhalt des Vierecks $XP_1P_2P_3$

a) möglichst klein,

b) möglichst groß ist.

Finde alle diese Punkte und berechne für jeden von ihnen auch jeweils den Flächeninhalt des Vierecks $XP_1P_2P_3$!

Hinweis: Für ein Viereck wird in dieser Aufgabe auch zugelassen, daß es "zum Dreieck entartet", wenn nämlich zwei seiner Eckpunkte miteinander zusammenfallen.

Aufgabe 340836:

a) Beweise, daß für jedes Dreieck die folgende Aussage gilt!

   Sind a und b zwei seiner Seitenlängen, so ist sein Flächeninhalt nicht größer als $\frac{a \cdot b}{2}$.

b) Beweise, daß für jedes Viereck $ABCD$ die folgende Aussage gilt!

   Sind $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ und $d = \overline{DA}$ seine Seitenlängen, so ist sein Flächeninhalt nicht größer als

$$\frac{(a + c) \cdot (b + d)}{4}.$$

   Hinweis: Beachte, daß die zu beweisenden Aussagen sich auch auf stumpfwinklige Dreiecke und auch auf Vierecke mit einer einspringenden Ecke beziehen! (Sogenannte "überschlagene" Vierecke, bei denen zwei Gegenseiten einander schneiden, sollen allerdings nicht zugelassen werden.)