33. Mathematik Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12
Saison 1993/1994

Aufgaben

33. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 331241:

Man untersuche für jede der beiden unten genannten Aussagen a) und b), ob diese Aussage für jede Menge wahr ist, in der sich genau 32 positive ganze Zahlen befinden, von denen jede kleiner als 112 ist und von denen keine zwei einander gleich sind:

a) Es gibt eine Zahl, die unter den Differenzen von je zwei dieser Zahlen mindestens fünfmal vorkommt.

b) Es gibt eine Zahl, die unter den Differenzen von je zwei dieser Zahlen mindestens sechsmal vorkommt.

Hinweis: In dieser Aufgabe sei als *Differenz* zweier Zahlen x, y stets die Zahl $|x-y|$ verstanden. Sind x, y Zahlen einer obengenannten Menge, so werde diese Differenz unter allen zu berücksichtigenden nur einmal gezählt (nicht etwa zweimal, als $|x-y|$ und als $|y-x|$).

Aufgabe 331242:

Für $n = 1, 2, 3, \dots$ sei

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot s_k^2} = \frac{1}{1 \cdot s_1^2} + \frac{1}{2 \cdot s_2^2} + \frac{1}{3 \cdot s_3^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot s_n^2}.$$

Man beweise für alle $n = 1, 2, 3, \dots$ die Ungleichung $t_n < 2$.

Aufgabe 331243:

Es sei $ABCDS$ eine gerade vierseitige Pyramide mit der Spitze S und der quadratischen Grundfläche $ABCD$. Ferner seien A', B', C', D' vier Punkte, die jeweils auf den Seitenkanten AS, BS, CS bzw. DS liegen und von S beliebig gegebene (von Null verschiedene) Abstände a, b, c bzw. d haben.

Man zeige, daß unter diesen Voraussetzungen stets gilt: Die Punkte A', B', C', D' liegen genau dann in einer gemeinsamen Ebene, wenn

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d} \quad \text{gilt.}$$

Aufgabe 331244:

Für jedes Dreieck ABC sei D bzw. E jeweils der Schnittpunkt der von A bzw. B ausgehenden Winkelhalbierenden mit der Gegenseite BC bzw. AC; ferner sei P ein beliebiger Punkt der Strecke DE.

Man beweise: Unter dieser Voraussetzung ist stets die Summe der Abstände des Punktes P zu den Geraden durch B, C bzw. durch A, C gleich dem Abstand des Punktes P zur Geraden durch A, B.

Aufgabe 331245:

Im Zwergenland wohnen 12 Zwerge. Jeder von ihnen hat unter den 11 anderen eine ungerade Anzahl von Freunden; alle diese Freundschaften beruhen auf Gegenseitigkeit. In jedem Monat hat einer der 12 Zwerge Geburtstag. Jeder Zwerg bewohnt ein Haus für sich allein, jedes Haus ist entweder rot oder grün gestrichen. Jeder Zwerg streicht in jedem Jahr an seinem Geburtstag sein Haus in derjenigen Farbe, die unter den Farben der Häuser seiner Freunde in größerer Anzahl als die andere Farbe vorkommt.

Zeigen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets ein Zeitpunkt existieren muß, von dem ab die Farbe aller Häuser unverändert bleibt!

Aufgabe 331246A:

Für alle positiven ganzen Zahlen n werde definiert:

$$f(n) = \left[2\sqrt{n}\right] - \left[\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\right].$$

Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, für die

a) $f(n) = 1$,

b) $f(n) = 0$

gilt.

Hinweis: Ist r eine reelle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g, für die $g \leq r < g + 1$ gilt, mit $g = [r]$ bezeichnet.

Aufgabe 331246B:

Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ ganzer, nicht negativer Zahlen m, n, für die $2^m - 5^n = 7$ gilt.