# 33. Mathematik Olympiade
# 2. Stufe (Regionalrunde)
# Klasse 12
# Saison 1993/1994

Aufgaben

# 33. Mathematik-Olympiade
## 2. Stufe (Regionalrunde)
## Klasse 12
## Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 331221:

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$2 - x + y = \sqrt{18 + x - y}, \tag{1}$$
$$\sqrt{1 + x + y} + \sqrt{2 + x - y} = 5. \tag{2}$$

Aufgabe 331222:

a) Beweisen, Sie, daß für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ die Ungleichung

$$\frac{4^2 - 9}{4^2 - 4} \cdot \frac{5^2 - 9}{5^2 - 4} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2 - 9}{n^2 - 4} > \frac{1}{6}$$

gilt!

b) Kann man die Zahl $\frac{1}{6}$ auf der rechten Seite dieser Ungleichung durch die Zahl 0,1667 ersetzen, ohne daß damit aus der in a) zu beweisenden Aussage. eine falsche Aussage entsteht?

Aufgabe 331223:

Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ positiver ganzer Zahlen $m$, $n$, für die $1\,994^m - 1\,993^n$ eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 331224:

Es sei $ABC$ ein gleichseitiges Dreieck, $C'$ sei der Bildpunkt von $C$ bei der Spiegelung an $AB$.

Für jeden Punkt $P$, der auf $AB$ zwischen $A$ und $B$ liegt, seien $Q$ auf $BC$ und $R$ auf $CA$ so gelegen, daß $PQCR$ ein Parallelogramm ist. Dann sei $X$ der von $P$ verschiedene Schnittpunkt der Umkreise der beiden Dreiecke $APR$ und $BPQ$.

Man beweise: Die Menge aller so zu erhaltenden Punkte $X$ stimmt überein mit dem im Innern des Dreiecks $ABC$ gelegenen Bogen den Umkreises des Dreiecks $ABC'$.