



33. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 12
Saison 1993/1994

Aufgaben





33. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 331211:

Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n , für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

Die Zahl n ist zehnstellig. Für die Ziffern ihrer Dezimaldarstellung, von links nach rechts mit a_0, a_1, \dots, a_9 bezeichnet, gilt: a_0 stimmt mit der Anzahl der Nullen, a_1 mit der Anzahl der Einsen, ..., a_9 mit der Anzahl der Neunen in der Dezimaldarstellung von n überein.

Aufgabe 331212:

Zeigen Sie, daß sich jede positive ganze Zahl z in der Form

$$z = a_1 \cdot 1^2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_n \cdot n^2$$

darstellen läßt, wobei n eine positive ganze Zahl ist und jeder Koeffizient a_1, a_2, \dots, a_n eine der Zahlen 0, 1, -1 ist!

Aufgabe 331213:

In einem Schönheitswettbewerb für Pudel stellen sich Asta, Benno, Cäsar und Dolly einer Jury aus vier Mitgliedern. Jedes Jurymitglied stimmt für einen der Hunde durch Heben eines Kärtchens mit dem Anfangsbuchstaben des Hundennamens. Als Regel zur Auswertung dieses Abstimmungsergebnisses wurde festgelegt: Kommen eindeutig zwei Hunde mit größerer Stimmenzahl als die beiden anderen Hunde vor, so gelten sie als qualifiziert. Tritt aber der Fall ein, daß in dem Abstimmungsergebnis nicht eindeutig zwei Hunde mit größerer Stimmenzahl als die beiden anderen Hunde vorkommen, so wird eine Zusatzregelung getroffen (z.B. eine erneute Abstimmung angesetzt).

Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen verschiedenen Abstimmungsergebnisse, die zu diesem letztgenannten Fall führen! Dabei gelten Abstimmungsergebnisse genau dann als einander gleich, wenn sie nicht nur in den Stimmenzahlen der Hunde, sondern auch darin übereinstimmen, welche Jurymitglieder für die betreffenden Hunde gestimmt haben. Beispielsweise gelten die Abstimmungsergebnisse $AABC$ und $CABA$ als voneinander verschieden.

Aufgabe 331214:

Man beweise, daß für jedes spitzwinklige Dreieck ABC die folgende Aussage gilt:

Sind a, b, c die Seitenlängen, α, β, γ die Winkelgrößen, ist F der Flächeninhalt, ist D der Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe und ist H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC , so gilt für die Streckenlängen \overline{CH} und \overline{HD} die Gleichung

$$\overline{CH} \cdot \overline{HD} = \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}{4F^2}$$