33. Mathematik Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 9
Saison 1993/1994

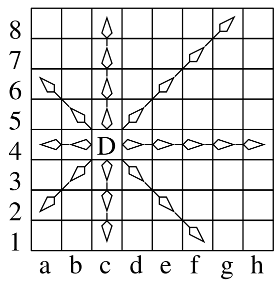
Aufgaben

33. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330941 = 331043:

Auf einem Schachbrett wird eine Figur "Dame" betrachtet, die wie im Schachspiel ziehen kann, also in den acht Richtungen parallel zum Brettrand oder diagonal, jeweils beliebig viele Felder. (siehe z.B. in der Abbildung alle von c4 aus möglichen Züge.)



Als *Länge eines Zuges* werde stets die Streckenlänge vom Mittelpunkt des Anfangsfeldes zum Mittelpunkt des Zielfeldes bezeichnet. Dabei werde die Seitenlänge jedes der 64 quadratischen Felder als Längeneinheit genommen. Gesucht wird eine Zugfolge, die den folgenden Bedingungen genügt:

(1) Bei jedem Zug der Zugfolge - mit Ausnahme des letzten - soll der Zug, der sich anschließt (d.h. als Startfeld das eben erreichte Zielfeld hat), eine *größere Länge* haben als der Zug, an den er sich anschließt.

(2) Das Zielfeld des letzten Zuges soll dem Startfeld des ersten Zuges *benachbart* sein (und zwar eine Seite mit ihm gemeinsam haben, nicht nur eine Ecke).

(3) Die Zugfolge soll in der Summe der Längen ihrer Züge *von keiner Zugfolge, die den Bedingungen (1) und (2) genügt, übertroffen* werden.

Geben Sie eine Zugfolge an und beweisen Sie, daß sie die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt!

Aufgabe 330942:

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen a, b, c von denen keine größer als 100 ist und mit denen die Ungleichungen

$$a + b \geq 101, \qquad a + c \leq 101, \qquad a + b + c \geq 201 \quad \text{gelten!}$$

Aufgabe 330943 = 331043:

Zu einem regelmäßigen Achteck werde ein Quadrat so konstruiert, daß der Mittelpunkt des Achtecks ein Eckpunkt des Quadrates ist und daß zwischen der Seitenlänge a des Achtecks und der Seitenlänge b des Quadrats die Ungleichung $b \geq \frac{4}{3}a$ gilt. Dann bezeichne f den Flächeninhalt desjenigen Flächenstücks, das dem Achteck und dem Quadrat gemeinsam ist.

Man beweise, daß zu gegebenem Achteck für alle Quadrate, die dieser Beschreibung entsprechen, f denselben Wert hat.

Aufgabe 330944:

Jemand findet die Angabe $22! = 11240007277 * *607680000$.

Darin sind auch die zwei durch * angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von 22! entsprechen.

Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie sie! Dabei darf verwendet werden, daß die angegebenen Ziffer korrekt sind.

Hinweis: Für jede positive ganze Zahl n wird $n!$ definiert als das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.

Aufgabe 330945 = 331045:

Bei Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems werde ein Punkt der Ebene "rational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde "irrational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde "gemischt" genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational und die andere irrational ist.

a) Gibt es in der Ebene Geraden, die nur Punkte einer Sorte enthalten? Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede der drei Sorten "rational", "irrational", "gemischt"!

b) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus genau zwei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist? Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede Zusammenstellung von zwei der drei Sorten!

c) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus jeder der drei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?

Aufgabe 330946:

Ist P ein Punkt im Innern eines Dreiecks ABC, so kann folgende Konstruktion durchgeführt werden: Die Parallele durch P zu CB schneidet AB in S_1, die Parallele durch S_1 zu AC schneidet BC in S_2, die Parallele durch S_2 zu BA schneidet CA in S_3. In dieser Weise kann man für $k = 1, 2, 3, ...$ fortsetzen:

Die Parallele durch S_{3k} zu CB schneidet AB in S_{3k+1}, die Parallele durch S_{3k+1} zu AC schneidet BC in S_{3k+2}, die Parallele durch S_{3k+2} zu BA schneidet CA in S_{3k+3}.

Beweisen Sie, daß für jedes Dreieck ABC und jeden Punkt P im Innern dieses Dreiecks eine der so konstruierten Parallelen wieder durch P gehen muß!