# 33. Mathematik Olympiade
# 3. Stufe (Landesrunde)
# Klasse 9
# Saison 1993/1994

Aufgaben

# 33. Mathematik-Olympiade
# 3. Stufe (Landesrunde)
# Klasse 9
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330931:

Beweisen Sie, daß es unendlich viele Stammbrüche gibt, die sich als Summe zweier voneinander verschiedener Stammbrüche darstellen lassen!

*Hinweis:* Ein Bruch heißt genau dann ein Stammbruch, wenn sein Zähler 1 lautet und sein Nenner eine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 330932:

Für jede positive ganze Zahl $n$ denke man sich nach folgender Vorschrift eine weitere Zahl $n'$ gebildet:

Aus der Zifferndarstellung von $n$ im Dezimalsystem wird die erste Ziffer weggenommen und stattdessen hinter die letzte Ziffer angefügt. Dann sei $n'$ die Zahl mit der entstandenen Zifferndarstellung.

Untersuchen Sie, ob es durch 7 teilbare Zahlen $n$ gibt, für die $n' = n : 7$ gilt!

Aufgabe 330933:

Antje hat in einem älteren Geometriebuch folgende Näherungskonstruktion für regelmäßige Vielecke mit gegebener Seitenlänge $s$ gefunden:

Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck $ABC$ mit der Seitenlänge $s$. Dann konstruiere man den Mittelpunkt $D$ von $AB$ und verlängere die Strecke $DC$ über $C$ hinaus. Auf dieser Verlängerung trage man fortgesetzt Strecken der Länge $\frac{s}{6}$ ab. Die dabei der Reihe nach erhaltenen Punkte seien mit $M_7$, $M_8$, $M_9$, ... bezeichnet. Für $n > 6$ ist dann jeweils der durch $A$ und $B$ gehende Kreis um $M_n$ näherungsweise der Umkreis eines regelmäßigen $n$-Ecks der Seitenlänge $s_n$.

Beate behauptet, speziell für $n = 12$ gelte das nicht nur näherungsweise, sondern sogar genau.

Beweisen Sie diese Behauptung!

Aufgabe 330934:

Das obenstehende "Kryptogramm" stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzten, daß eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, daß als Anfangsziffer (für $Z$, $D$ und $F$) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

$$\begin{array}{ccccc} & Z & W & E & I \\ + & D & R & E & I \\ \hline = & F & \ddot{U} & N & F \end{array}$$

a) Geben Sie eine Lösung an!

b) Untersuchen Sie, ob es mehr als fünf Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

*Hinweis:* Zwei Lösungen heißen genau dann einander gleich, wenn in der einen dieser Lösungen jeder Buchstabe durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.

Aufgabe 330935:

Ermitteln Sie alle positiven ganzen Zahlen $n$ mit der Eigenschaft, daß die drei Zahlen $n + 1$, $n + 10$ und $n + 55$ einen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben!

Aufgabe 330936:

Man beweise, daß für jedes konvexe Viereck $ABCD$ die folgende Aussage gilt:

Sind $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ die Mittelpunkte der Seiten $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ und $M_5$, $M_6$ die Mittelpunkte der Diagonalen $AC$, $BD$ so gehen die drei Strecken $M_1M_3$, $M_2M_4$ und $M_5M_6$ durch einen gemeinsamen Punkt.

*Hinweis:* Ein Viereck ist genau dann konvex, wenn alle seine Innenwinkel kleiner als 180° sind.