33. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Saison 1993/1994

Aufgaben

33. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330731:

Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen (1) und (2) erfüllen!

(1) Die Zahl z ist durch 48 teilbar.

(2) Die zweite Ziffer der Zahl z ist eine 3, die dritte Ziffer von z ist eine 4.

Aufgabe 330732:

In einem Kaufhaus waren $\frac{4}{5}$ aller Beschäftigten Frauen. Zu Anfang eines Monats waren 12,5% dieser Frauen nicht verheiratet. Von den in diesem Kaufhaus beschäftigten Männern waren 18,75% nicht verheiratet.

Während des Monats heirateten vier Paare, von denen jeweils sowohl der Mann als auch die Frau zu den eben genannten unverheirateten Beschäftigten des Kaufhauses gehörten. Weitere Änderungen gab es nicht. Danach waren noch genau 36 Beschäftigte des Kaufhauses unverheiratet.

Wie viele Beschäftigte hatte das Kaufhaus insgesamt?

Aufgabe 330733:

Für jedes Dreieck ABC bezeichne S den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Ferner seien wie üblich mit α, β bzw. γ die Größen der Innenwinkel $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$ bzw. $\sphericalangle ACB$ bezeichnet.

a) Wie groß sind die Winkel $\sphericalangle ASB$ und $\sphericalangle BSC$ in einem Dreieck ABC, in dem $\alpha = 42°$ und $\beta = 98°$ gilt?

b) Ermittle γ in jedem Dreieck ABC, in dem $\sphericalangle ASB$ die Größe 140° hat!

c) Beweise, daß jedes Dreieck ABC, in dem $\sphericalangle ASB$ und $\sphericalangle BSC$ einander gleich groß sind, gleichschenklig ist! Gib auch an, welche zwei Dreiecksseiten in jedem solchen Dreieck einander gleich lang sind!

Aufgabe 330734:

Ulrike sitzt am Fenster eines Zuges, der mit der Geschwindigkeit $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt. Sie beobachtet, daß an ihrem Fenster ein Gegenzug innerhalb von 4 Sekunden vorüberfährt. Außerdem weiß sie, daß dieser Gegenzug 120 m lang ist.

Untersuche, ob die Geschwindigkeit des Gegenzuges durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, gib diese Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an!

Aufgabe 330735:

Die Klassen 7a, 7b, 7c trugen ein Fußballturnier aus. Jede Klasse spielte genau einmal gegen jede andere Klasse. Am Ende ergab sich folgender Tabellenstand:

Klasse	Torverhältnis	Punktverhältnis
7b	3:2	3:1
7a	3:1	2:2
7c	2:5	1:3

Untersuche, ob durch diese Angaben eindeutig für jedes Spiel bestimmt ist, wieviele Tore jede Mannschaft in dem betreffenden Spiel erzielt hat! Wenn das der Fall ist, so gib alle diese Ergebnisse an!

Hinweis: Wie üblich bedeutet das Torverhältnis $a : b$ für eine Mannschaft, daß sie in allen Spielen zusammen a Tore erzielt hat und b Tore hinnehmen mußte. Ferner erhält die Mannschaft für jedes gewonnene Spiel 2 Pluspunkte, für jedes verlorene Spiel 2 Minuspunkte und für jedes unentschiedene Spiel 1 Plus- und 1 Minuspunkt. Diese Punkte werden addiert, und dann bedeutet das Punktverhältnis $c : d$, daß die Mannschaft die Summe c der Pluspunkte und die Summe d der Minuspunkte erhalten hat.

Aufgabe 330736:

a) Zeichne ein Dreieck ABC und den Mittelpunkt D der Seite AB! Wähle auf der Strecke DC einen Punkt P zwischen D und C! Zeichne dann die Strecken AP und BP!

   Untersuche für jedes Dreieck ABC (mit D als Mittelpunkt der Seite AB) und für jeden (auf DC gelegenen) Punkt P, ob eines der beiden Dreiecke ACP, BCP größeren Flächeninhalt hat als das andere oder ob sie einander gleichgroßen Flächeninhalt haben!

b) Für jedes Dreieck ABC gibt es in seinem Inneren genau einen Punkt Q, mit dem die Bedingung erfüllt wird, daß die Flächeninhalte der Dreiecke ACQ, BCQ und ABQ sich wie $1 : 2 : 3$ verhalten. (Dies darf im folgenden ohne Beweis verwendet werden.)

   Beschreibe, wie zu jedem Dreieck ABC ein Punkt Q gefunden werden kann, und beweise, daß die genannte Bedingung stets mit diesem - nach Deiner Beschreibung gefundenen - Punkt Q erfüllt wird!