32. Mathematik Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12
Saison 1992/1993

Aufgaben

32. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 321241:

Von den Eckpunkten eines regelmäßigen 250-Ecks wurden genau 16 gelb und alle anderen blau gefärbt.

Beweisen Sie, daß es zu jeder solchen Färbung eine Drehung des 250-Ecks um seinen Mittelpunkt gibt, bei der alle gelben Ecken in blaue übergehen!

Aufgabe 321242:

Man beweise, daß ein Würfel für jede natürliche Zahl $n \geq 100$ in genau n Würfel zerlegt werden kann.

Aufgabe 321243:

Von 1 993 Punkten P_1, ..., $P_{1\,993}$ werde vorausgesetzt, daß keine drei P_i, P_j, P_k von ihnen ($i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$) einer gemeinsamen Geraden angehören.

Ferner sei für gewisse Paare (i, j) mit $1 \geq i < j \geq 1\,993$ jeweils die Strecke P_iP_j konstruiert; dabei werde vorausgesetzt, daß jeder der 1 993 Punkte P_i mit mindestens 1 661 anderen dieser 1 993 Punkte durch eine der konstruierten Stecken verbunden ist.

Man beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Unter den P_i gibt es 7 Punkte, von denen jeder mit jedem anderen dieser 7 Punkte durch eine der konstruierten Strecken verbunden ist.

Aufgabe 321244:

Man beweise: Wenn reelle Zahlen a, b, c das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2, \\ ab + ac + bc &= 1 \end{aligned}$$

erfüllen, so gilt

$$0 \leq a \leq \frac{4}{3}, \qquad 0 \leq b \leq \frac{4}{3}, \qquad 0 \leq c \leq \frac{4}{3}.$$

Aufgabe 321245:

Man ermittle die größtmögliche Anzahl von Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen und mit dem Umfang 1 993, unter denen sich keine zwei untereinander kongruenten Dreiecke befinden.

Aufgabe 321246A:

Eine Bus-Bahn-Rundreise durch n Städte sei eine Reise, die in einer dieser Städte beginnt, jede andere von ihnen genau einmal erreicht, dann zum Ausgangspunkt zurückführt und insgesamt keine anderen Verkehrsmittel als Bus oder Bahn benutzt.

Von n Städten S_1, ..., S_n werde vorausgesetzt, daß zwischen zwei von ihnen genau eine (in beiden Richtungen benutzbare) Verbindung besteht und daß diese jeweils nur entweder eine Bus- oder eine Bahnverbindung ist.

Man beweise für jede natürliche Zahl $n \geq 3$, daß es durch n Städte, die diese Voraussetzungen erfüllen, stets eine Bus-Bahn-Rundreise geben muß, bei der das Verkehrsmittel höchstens einmal gewechselt wird.

Aufgabe 321246B:

Eine Funktion f erfülle folgende Voraussetzungen: f ist für alle reellen Zahlen x definiert und stetig, alle Funktionswerte $f(x)$ sind reelle Zahlen, und für jedes reelle x gilt $f(f(f(x))) = x$.

Man beweise: Diese Voraussetzungen werden nur von derjenigen Funktion f erfüllt, die für alle reellen x durch $f(x) = x$ definiert ist.