# 32. Mathematik Olympiade
# 3. Stufe (Landesrunde)
# Klasse 12
# Saison 1992/1993

Aufgaben

# 32. Mathematik-Olympiade
# 3. Stufe (Landesrunde)
# Klasse 12
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 321231:

Man untersuche, ob es eine positive ganze Zahl $n$ gibt, für die die Zahl $\sqrt{n}+\sqrt{n+4}$ rational ist.

*Hinweis:* Als bekannter Sachverhalt kann die Aussage verwendet werden, daß für jede natürliche Zahl $k$, die keine Quadratzahl ist, die Zahl $\sqrt{k}$ nicht rational ist.

Aufgabe 321232:

Man beweise: Zu jeder Primzahl $p$ gibt es eine reelle Zahl $c$, mit der Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,\ldots}$, die durch

$$a_1 = c, \qquad a_{k+1} = a_k^2 + c \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

definiert wird, periodisch ist und die Zahl $p$ als kleinste Periodenlänge hat.

*Hinweis:* Eine Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,\ldots}$ heißt genau dann *periodisch*, wenn es eine positive ganze Zahl $n$ gibt, mit der für alle $k = 1, 2, 3, \ldots$ die Gleichung $a_k = a_{k+n}$ gilt. Ist das der Fall, so heißt jede positive ganze Zahl $n$, mit der das zutrifft, eine *Periodenlänge* der Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,\ldots}$

Aufgabe 321233A:

Man ermittle alle diejenigen Funktionen $f$, die für alle reellen Zahlen $x$ mit $x \neq 0$ und $x \neq 1$ definiert sind sowie für alle reellen Zahlen $x$ mit $x \neq 0$, $x^2 - x - 1 \neq 0$ und $x^2 + x - 1 \neq 0$ die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$2 \cdot f\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x-1}\right) - 3 \cdot f\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}\right) = 5 \cdot f\left(x - \frac{1}{x}\right). \tag{1}$$

Aufgabe 321233B:

Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ermittle man alle diejenigen $n$-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ positiver ganzer Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= 3 \cdot (x_1 + x_2), \\ x_2 \cdot x_3 &= 3 \cdot (x_2 + x_3), \\ &\ldots \\ x_{n-1} \cdot x_n &= 3 \cdot (x_{n-1} + x_n), \\ x_n \cdot x_1 &= 3 \cdot (x_n + x_1). \end{aligned}$$

Aufgabe 321234:

Von einer ungeraden natürlichen Zahl $n$ und von $n$ Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ werde vorausgesetzt, daß jede der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ genau einmal unter den $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vorkommt.

Man beweise, daß unter dieser Voraussetzung das Produkt

$$(a_1 - 1) \cdot (a_2 - 2) \cdot ... \cdot (a_n - n)$$

stets eine gerade Zahl sein muß.

Aufgabe 321235:

Man beweise, daß es zu jeder positiven ganzen Zahl $n$ eine reelle Zahl $c$ gibt, so daß für alle reellen Zahlen $a > 0$ die Ungleichung

$$a + a^2 + a^3 + ... + a^{2n} \leq c \cdot \left(1 + a^{2n+1}\right) \quad \text{gilt.}$$

Man beweise auch, daß es zu jedem $n$ unter allen solchen Zahlen $c$ eine kleinste gibt, und ermittle jeweils zu $n$ dieses kleinste $c$.

Aufgabe 321236:

Es seien $k_1$, $k_2$ und $k_3$ drei konzentrische Kreise mit den Radien $r_1 = 5$, $r_2 = 3$ bzw. $r_3 = 1$. Man ermittle den größtmöglichen Wert für den Flächeninhalt eines Dreiecks $ABC$ mit der Eigenschaft, daß $A$ auf $k_1$, $B$ auf $k_2$ und $C$ auf $k_3$ liegt.

*Hinweis:* Als bekannter Sachverhalt kann die Aussage verwendet werden, daß unter allen Dreiecken mit der genannten Eigenschaft ein Dreieck mit größtmöglichem Flächeninhalt *existiert*.