32. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 9
Saison 1992/1993

Aufgaben

32. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 320931:

In einem Land gibt es nur zwei Sorten von Menschen: Edelmänner und Schurken. Jeder Edelmann macht nur wahre Aussagen, jeder Schurke nur falsche Aussagen. Ein nicht aus diesem Land stammender Reporter berichtet, er habe folgendes Gespräch dreier Einwohner A, B und C dieses Landes gehört:

A sagt zu B: "Wenn C ein Edelmann ist, dann bist du ein Schurke."
C sagt zu A: "Du bist von anderer Sorte als ich."

Kann ein solches Gespräch stattgefunden haben? Wenn das der Fall ist, geht dann aus dem Gespräch für jeden der drei A, B, C eindeutig hervor, ob er Edelmann oder Schurke ist, und zu welchen Sorten gehören dann A, B und C?

Aufgabe 320932:

Wieviele Paare (x, y) natürlicher Zahlen für die $10x + y < 1\,993$ gilt, gibt es insgesamt?

Aufgabe 320933:

Gegeben ist eine Gerade g und auf ihr drei Punkte A, B, C, in dieser Reihenfolge angeordnet.

a) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von den Längen $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$ den Radius eines Kreises k, der durch A und B geht und eine durch C gehende Tangente besitzt, die auf g senkrecht steht!

b) Beweisen Sie, daß es einen Kreis c um C gibt, auf dem alle Berührungspunkte der Tangente liegen, die von C an alle diejenigen Kreise k gelegt werden, die durch A und B gehen!

Aufgabe 320934:

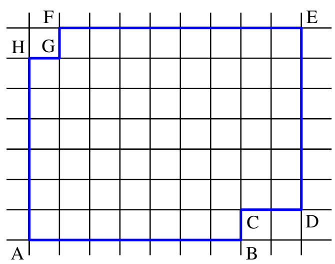
Ist p eine Primzahl, so sei M_p die Menge aller derjenigen Zahlen z, die sich mit positiven ganzen Zahlen x und y in der Gestalt $z = x^2 + p \cdot y^2$ darstellen lassen.

Beweisen Sie, daß für jede Primzahl p die folgende Aussage (*) gilt!

Wenn eine Zahl z der Menge M_p angehört, dann gehört auch die Zahl z^2 der Menge M_p an. (*)

Aufgabe 320935:

Auf kariertem Papier (eingeteilt in quadratische Karos) ist ein Achteck $ABCDEFGH$ wie in der Abbildung gezeichnet.



Jemand will es in zwei kongruente Teilflächen zerschneiden, und zwar sollen sich diese Teilflächen so miteinander zur Deckung bringen lassen, daß dabei A mit E zur Deckung kommt. Die Schnittkurve soll ein zusammenhängender Streckenzug sein, der sich selbst nicht überkreuzt und der nur aus Teilstrecken zusammengesetzt ist, die auf dem karierten Papier vorgegeben sind.

Beweisen Sie, daß es genau einen Streckenzug gibt, mit dem das Achteck wie gewünscht zerschnitten werden kann!

Aufgabe 320936:

a) Geben Sie drei ganz Zahlen x, y und z an, für die

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 14z - 57 = 0 \quad \text{gilt!} \tag{1}$$

b) Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen x, y, z, die die Gleichung (1) erfüllen!