31. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 12
Saison 1991/1992

Aufgaben

31. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 311221:
Ist c eine reelle Zahl, so werde das Gleichungssystem

$$x + y = 1, \quad (1)$$
$$x^2 + y^2 = c. \quad (2)$$

gebildet.

a) Man ermittle für $c = 2$ alle Paare $(x; y)$, die das Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.

Man ermittle ferner jeweils alle diejenigen reellen Zahlen c, für die das Gleichungssystem (1), (2)

b) keine Lösung $(x; y)$ aus reellen Zahlen x, y hat,

c) genau eine Lösung $(x; y)$ hat,

d) zwei verschiedene Lösungen $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ aus reellen Zahlen hat.

Aufgabe 311222:
Man untersuche, ob es ein gleichseitiges Dreieck ABC gibt, dessen drei (nicht miteinander zusammenfallende) Eckpunkte in einem kartesischen Koordinatensystem sämtlich ganzzahlige Koordinaten haben.

Aufgabe 311223:
Man ermittle alle diejenigen Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen, mit denen durch

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + b}$$

eine Funktion f definiert wird, die folgende Bedingungen erfüllt:

(1) Die Funktion f ist für alle reellen x definiert.

(2) Es gilt $1 < f(2) < f(1) < 2$.

(3) Die Funktion f besitzt zwei verschiedene reelle Nullstellen.

Aufgabe 311224:
Man beweise, daß für alle reellen Zahlen x die Ungleichung

$$x^6 + x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 4x^2 + x + 1 \geq 0 \quad \text{gilt.}$$