31. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 12
Saison 1991/1992

Aufgaben

31. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 311211:

Vier Dörfer bilden die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seitenlänge 4 km.

Man untersuche, ob es möglich ist, diese Dörfer durch ein Straßennetz mit einer Gesamtlänge von weniger als 11 km zu verbinden.

Aufgabe 311212:

Man ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, n) positiver ganzer Zahlen a, b, n, für die folgende Aussagen (1) und (2) gelten:

(1) Die Zahlen a und b sind Primzahlen.

(2) Es gilt $97ab = (a + n)(b + n)$.

Aufgabe 311213:

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C sei D der Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle BAC$. Ein Punkt P auf AB und ein Punkt Q auf AD seien so gelegen, daß DPQ ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei P ist.

Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen

a) der vierte Eckpunkt R des Quadrates $DPQR$ auf AC liegt,

b) die Strecken BD und BP einander gleiche Länge haben.

Man ermittle die Seitenlänge des Quadrates $DPQR$

c) für $\overline{BC} = 49$ mm, $\overline{AC} = 168$ mm,

d) allgemein ausgedrückt durch $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$.

Aufgabe 311214:

Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen mit $x \leq y \leq z$, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllt ist:

$$x + y + z = 5, \quad (1)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 15, \quad (2)$$
$$xyz = -3. \quad (3)$$