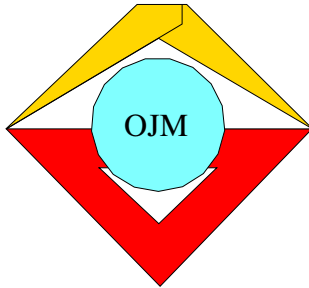




30. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 12
Saison 1990/1991

Aufgaben





30. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 301231:

- a) Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c, d stets $\sqrt{ac} + \sqrt{bd} \leq \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}$ gilt.
- b) Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c, d stets $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}$ gilt.

Aufgabe 301232:

Im Raum seien n Punkte ($n \geq 3$) so gelegen, daß sich unter je drei dieser Punkte stets mindestens zwei befinden, die zueinander einen Abstand kleiner als 1 haben.

Man beweise, daß es unter dieser Voraussetzung stets zwei Kugeln K_1 und K_2 vom Radius 1 geben muß, so daß jeder der n Punkte (mindestens) einen der beiden Kugeln K_1, K_2 angehört.

Bemerkung: Jeder Kugelkörper werde hier ohne seinen Rand (die Kugelfläche) verstanden.

Aufgabe 301233A:

Man ermittle alle diejenigen siebzehnstelligen natürlichen Zahlen n , für deren 17 Ziffern x_1, x_2, \dots, x_{17} die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind:

- (1) Es gilt: $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{17}$.
- (2) Für die Summe $s = x_1 + x_2 + \dots + x_{17}$ und das Produkt $p = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{17}$ gilt: $s = p$.

Hinweis: Die Reihenfolge x_1, \dots, x_{17} entspreche der üblichen Schreibweise; es bezeichne also x_{17} die Einerziffer, x_{16} die Zehnerziffer u.s.w.

Aufgabe 301233B:

Es seien D_1, \dots, D_n Dosen, für deren Größen (Durchmesser) d_1, \dots, d_n in geeigneter Maßeinheit

$$d_1 = 2, \quad d_2 = 3, \quad \dots, \quad d_n = n + 1$$

gelte. Weiter seien G_1, \dots, G_n Gegenstände, für deren Größen g_1, \dots, g_n

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 2, \quad \dots, \quad g_n = n$$

gelte. Dabei seien die Größen so abgestimmt, daß jeweils gilt: Genau dann, wenn $g_i \leq d_j$ ist, paßt G_i in D_j .

Ermitteln Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Anzahl $A(n)$ aller derjenigen Verteilungen der Gegenstände in die Dosen, bei denen in jeder Dose genau ein Gegenstand liegt.



Hinweis: Zwei Verteilungen heißen genau dann verschieden voneinander, wenn mindestens ein Gegenstand bei einer dieser beiden Verteilungen in einer anderen Dose liegt als bei der anderen Verteilung.

Aufgabe 301234:

Man beweise: In jedem n -Eck ($n \geq 3$) gibt es mindestens zwei verschiedene Seiten des n -Ecks, für deren Längen a, b die Ungleichung $b < 2a$ gilt.

Aufgabe 301235:

Man untersuche, ob die durch

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

definierte Folge (x_n) konvergent ist, und ermittle, wenn das der Fall ist, ihren Grenzwert.

Aufgabe 301236:

Man beweise: Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n , für die $2n + n^2$ durch 100 teilbar ist.