# 30. Mathematik Olympiade
# 3. Stufe (Landesrunde)
# Klasse 12
# Saison 1990/1991

Aufgaben

# 30. Mathematik-Olympiade
# 3. Stufe (Landesrunde)
# Klasse 12
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

## Aufgabe 301231:

a) Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen $a$, $b$, $c$, $d$ stets $\sqrt{ac} + \sqrt{bd} \leq \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}$ gilt.

b) Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen $a$, $b$, $c$, $d$ stets $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}$ gilt.

## Aufgabe 301232:

Im Raum seien $n$ Punkte ($n \geq 3$) so gelegen, daß sich unter je drei dieser Punkte stets mindestens zwei befinden, die zueinander einen Abstand kleiner als 1 haben.

Man beweise, daß es unter dieser Voraussetzung stets zwei Kugelkörper $K_1$ und $K_2$ vom Radius 1 geben muß, so daß jeder der $n$ Punkte (mindestens) einen der beiden Kugelkörper $K_1$, $K_2$ angehört.

*Bemerkung:* Jeder Kugelkörper werde hier ohne seinen Rand (die Kugelfläche) verstanden.

## Aufgabe 301233A:

Man ermittle alle diejenigen siebzehnstelligen natürlichen Zahlen $n$, für deren 17 Ziffern $x_1$, $x_2$, ..., $x_{17}$ die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind:

(1) Es gilt: $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_{17}$.

(2) Für die Summe $s = x_1 + x_2 + ... + x_{17}$ und das Produkt $p = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{17}$ gilt: $s = p$.

*Hinweis:* Die Reihenfolge $x_1$, ..., $x_{17}$ entspreche der üblichen Schreibweise; es bezeichne also $x_{17}$ die Einerziffer, $x_{16}$ die Zehnerziffer u.s.w.

## Aufgabe 301233B:

Es seien $D_1$, ..., $D_n$ Dosen, für deren Größen (Durchmesser) $d_1$, ..., $d_n$ in geeigneter Maßeinheit

$$d_1 = 2, \quad d_2 = 3, \quad ..., \quad d_n = n+1$$

gelte. Weiter seien $G_1$, ..., $G_n$ Gegenstände, für deren Größen $g_1$, ..., $g_n$

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 2, \quad ..., \quad g_n = n$$

gelte. Dabei seien die Größen so abgestimmt, daß jeweils gilt: Genau dann, wenn $g_i \leq d_j$ ist, paßt $G_i$ in $D_j$.

Ermitteln Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Anzahl $A(n)$ aller derjenigen Verteilungen der Gegenstände in die Dosen, bei denen in jeder Dose genau ein Gegenstand liegt.

*Hinweis:* Zwei Verteilungen heißen genau dann verschieden voneinander, wenn mindestens ein Gegenstand bei einer dieser beiden Verteilungen in einer anderen Dose liegt als bei der anderen Verteilung.

Aufgabe 301234:

Man beweise: In jedem $n$-Eck ($n \geq 3$) gibt es mindestens zwei verschiedene Seiten des $n$-Ecks, für deren Längen $a$, $b$ die Ungleichung $b < 2a$ gilt.

Aufgabe 301235:

Man untersuche, ob die durch

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

definierte Folge $(x_n)$ konvergent ist, und ermittle, wenn das der Fall ist, ihren Grenzwert.

Aufgabe 301236:

Man beweise: Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen $n$, für die $2n + n^2$ durch 100 teilbar ist.