30. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Saison 1990/1991

Aufgaben

30. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 300731:

In einem Lehrbuch aus dem Jahre 1525 wird sinngemäß folgende Aufgabe gestellt:

> Ein Hund jagt einen Fuchs. Jeweils in der Zeit, in der der Fuchs 9 Sprünge macht, macht der Hund 6 Sprünge, aber mit 3 Sprüngen legt der Hund einen ebenso langen Weg zurück, wie der Fuchs mit 7 Sprüngen.
>
> Mit wieviel seiner Sprünge holt der Hund den Fuchs ein, wenn der Fuchs zu Beginn 60 Fuchssprünge Vorsprung hat?

Bemerkung: Es wird vorausgesetzt, daß der Hund der Spur des Fuchses folgt und daß beide ihren ersten Sprung gleichzeitig beginnen.

Aufgabe 300732:

200 Schüler seien in Form eines Rechtecks, nämlich in Längsreihen zu je 20 und in Querreihen zu je 10 Schülern, aufgestellt.

Nun werde aus jeder Querreihe ein möglichst kleiner Schüler herausgerufen. Unter den so ermittelten 20 Schülern werde ein möglichst großer mit A bezeichnet. Die 20 Schüler stellen sich dann wieder auf ihre ursprünglichen Plätze.

Sodann werde aus jeder Längsreihe ein möglichst großer Schüler herausgerufen und unter den so ermittelten 10 Schülern ein möglichst kleiner mit B bezeichnet. Dabei stelle sich heraus, daß B eine andere Größe als A hat.

Untersuche, welcher von den beiden Schülern A und B unter diesen Voraussetzungen der größere sein muß!

Aufgabe 300733:

Aus zwei gegebenen Längen $h_b = 4,0\,\text{cm}$ und $p_b = 4,0\,\text{cm}$ sowie einer gegebenen Winkelgröße $\beta = 20°$ soll ein Dreieck ABC konstruiert werden. Wenn dabei D den Fußpunkt der auf AC senkrechten Höhe D bezeichnet, so wird gefordert:

(1) Es gilt $\overline{BD} = h_b$.

(2) Es gilt $\overline{AD} = p_b$.

(3) Der Winkel $\sphericalangle ABC$ hat die Größe β.

a) Beweise: Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Stücken h_b, p_b, β konstruiert werden;

b) beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise: Wenn ein Dreieck ABC nach deiner Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (1), (2) und (3).

d) Stelle fest, ob ein Dreieck durch die Bedingungen (1), (2) und (3) bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 300734:

Jemand möchte nach folgenden Regeln möglichst viele verschiedene der natürlichen Zahlen von 1 bis 1 000 auswählen:

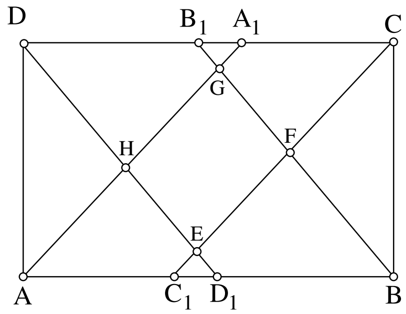
> Als erste Zahl ist eine zufällig gewählte der Zahlen 1 bis 6 zu nehmen, indem gewürfelt und die von dem Würfel gezeigte Zahl gewählt wird.
>
> Die weiteren Zahlen sollen so gewählt werden, daß folgendes gilt: Wenn die Auswahl von Zahlen beendet ist, so haben je zwei der insgesamt ausgewählten Zahlen stets eine durch 3 teilbare Summe.

Ermittle (in Abhängigkeit von allen Möglichkeiten der ersten Zahl) die größtmögliche Anzahl von Zahlen, die man nach diesen Regeln auswählen kann!

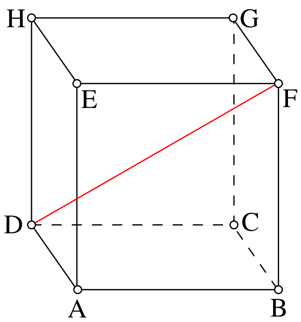
Aufgabe 300735:

Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlinien $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$, und es sei $a > b$. Auf AB seien Punkte C_1 und D_1 sowie auf CD die Punkte A_1 und B_1 derart eingezeichnet, daß die Strecken AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 jeweils Winkelhalbierende eines Innenwinkels von $ABCD$ sind. Die Schnittpunkte E, F, G, H dieser Winkelhalbierenden miteinander seien wie in der Abbildung bezeichnet.

Ermittle den Flächeninhalt I des Vierecks $EFGH$, wenn außerdem vorausgesetzt wird, daß $a = 8$ cm und $b = 5$ cm gilt!



Aufgabe 300736:



Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel.

Beweise, daß die Abstände der Punkte A, B, C, E, G und H von der Raumdiagonalen DF sämtlich einander gleich sind!