29. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1989/1990

Aufgaben

29. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

<u>Aufgabe 291241:</u>

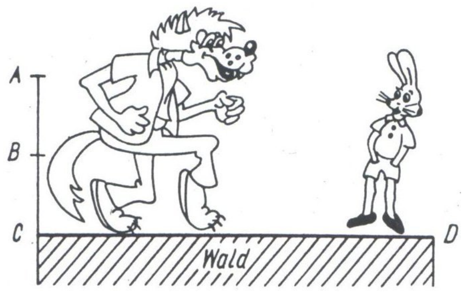
Für jede reelle Zahl a untersuche man, ob die Gleichung

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{x}}}}=x \qquad (1)$$

(mindestens) eine reelle Lösung x hat, und ermittle alle reellen Lösungen der Gleichung (1).

<u>Aufgabe 291242:</u>

Ein Waldstück werde durch eine Strecke CD begrenzt (siehe Abbildung). In derjenigen Halbebene, die von der Geraden durch C und D begrenzt wird und in der das Waldstück nicht liegt, befindet sich auf der durch C senkrecht zu CD gehenden Geraden ein Hase in einem Punkt A und ein Wolf in einem Punkt B zwischen A und C. Dabei sei $\overline{AB}=\overline{BC}=a$ und $\overline{CD}=5a$ mit einer gegebenen Länge a.



Der Hase laufe geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit vom Punkt A zu einem von ihm gewählten Zielpunkt X der Strecke CD. Der Wolf kann höchstens halb so schnell laufen wie der Hase. Der Hase werde genau dann unterwegs vom Wolf gefaßt, wenn die Strecke AX einen Punkt H enthält, den der Wolf gleichzeitig mit dem Hasen oder sogar eher als der Hase erreichen kann.

Man ermittle alle diejenigen Punkte X auf CD, bei deren Wahl als Zielpunkt der Hase erreicht, daß er nicht unterwegs vom Wolf gefaßt wird.

<u>Aufgabe 291243:</u>

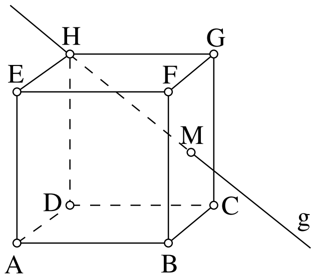
Man beweise: Zu jedem System $(a,\, b,\, c,\, d)$ von positiven ganzen Zahlen a, b, c, d, die den Bedingungen $a\cdot b=c\cdot d$ und $a+b=c-d$ genügen, gibt es ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seitenlängen, in cm gemessen, sämtlich ganze Zahlen als Maßzahlen haben und dessen Flächeninhalt, in cm^2 gemessen, die Maßzahl $a\cdot b$ hat.

<u>Aufgabe 291244:</u>

Man ermittle alle diejenigen Tripel $(x,\, y,\, z)$ natürlicher Zahlen x, y und z, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x+2y^2-3z=17, \qquad (1)$$
$$x^2-3y+2z=9. \qquad (2)$$

Aufgabe 291245:



Die Ecken eines Würfels mit gegebener Kantenlänge a seien wie in der Abbildung mit A, B, C, D, E, F, G, H bezeichnet. Die Ebene, in der A, B, C, D liegen sei ε_1; die Ebene, in der B, C, G, F liegen sei ε_2; die Gerade durch H und den Mittelpunkt M des Quadrates $BCGF$ sei g genannt.

Man beweise, daß es unter allen Strecken, die einen Punkt von ε_1 mit einem Punkt von ε_2 verbinden und deren Mittelpunkt auf g liegt, eine Strecke von kleinster Länge gibt. Man ermittle diese kleinste Länge.

Aufgabe 291246A:

In zwei Urnen A und B befinden sich insgesamt genau m rote und genau n blaue Kugeln. Die Gesamtzahl der Kugeln ist größer als 2; mindestens eine der Kugeln ist rot. Zu Beginn enthält A alle roten und B alle blauen Kugeln.

Indem nacheinander abwechselnd aus A und B jeweils eine zufällig ausgewählte Kugel herausgenommen und in die andere Urne hineingelegt wird, sollen die Kugeln vermischt werden. Begonnen wird mit der Entnahme aus Urne A.

Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ von Anzahlen m und n, bei deren Vorgabe die vierte umgelegte Kugel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ rot ist.

Hinweis: Enthält eine Urne genau Z Kugeln, so wird hier unter zufälliger Auswahl einer Kugel verstanden, daß für alle Z Kugeln die Wahrscheinlichkeit ihrer Auswahl gleich $\frac{1}{Z}$ ist. Werden allgemeiner von M möglichen Ereignissen G als *günstig* und $M - G$ als *ungünstig* angesehen und sind alle M Ereignisse gleichwahrscheinlich, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines *günstigen* Ereignisses gleich $\frac{G}{M}$.

Aufgabe 291246B:

Man ermittle für jede natürliche Zahl n mit $n > 1$ alle diejenigen Funktionen f, die mit dieser Zahl n den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:

(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert.

(2) Die Funktion f ist an der Stelle $x = 0$ stetig.

(3) Für jede reelle Zahl x gilt $n \cdot f(nx) = f(x) + nx$.