29. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1989/1990

Aufgaben

29. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 291231:

Man beweise: Wenn n eine natürliche Zahl größer als 2 ist und wenn a_1, ..., a_n Zahlen sind, die

$$a_1^2 = ... = a_n^2 = 1 \quad \text{und} \quad a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$$

erfüllen, dann ist stets n durch 4 teilbar.

Aufgabe 291232:

Ist $ABCD$ ein Tetraeder, so bezeichnet R den Radius seiner Umkugel (d.h. derjenigen Kugel, auf der die Punkte A, B, C, D liegen) und r den Radius seiner Inkugel (d.h. derjenigen Kugel, deren Mittelpunkt im Innern des Tetraeders liegt und die jede der Flächen ABC, ABD, ACD, BCD berührt).

Man beweise, daß es unter allen Tetraedern $ABCD$ mit $AB \perp AC$, $AC \perp AD$, $AD \perp AB$ auch solche gibt, für die das Verhältnis $R : r$ einen kleinsten Wert annimmt; man ermittle diesen Wert.

Aufgabe 291233A:

Auf der Randlinie eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit der Seitenlänge 1 m bewegen sich drei Punkte P_1, P_2, P_3 und zwar P_1 mit der Geschwindigkeit 1 m/s, P_2 mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2}$ m/s, P_3 mit der Geschwindigkeit $\sqrt{3}$ m/s.

Zu Beginn (Zeitpunkt $t = 0$) befindet sich P_1 in A, P_2 in B, P_3 in C. Die Bewegungsrichtung ist bei allen drei Punkten einheitlich stets im Umlaufsinn von A nach B, von B nach C, von C nach A.

Man untersuche, ob es einen Zeitpunkt $t > 0$ gibt, zu dem P_1, P_2, P_3 wieder die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind (wobei auch der Fall $P_1 = P_2 = P_3$ als Sonderfall eines gleichseitigen Dreiecks aufgefaßt werde).

Aufgabe 291233B:

Man untersuche für jede gegebene natürliche Zahl $n \geq 2$, ob es unter allen denjenigen n-Tupeln (x_1, x_2, ..., x_n) reeller Zahlen, für die

$$x_i \geq \frac{1}{n^2} \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$$

gilt, eines gibt, für das der Term

$$s = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}$$

a) einen kleinsten Wert

b) einen größten Wert

annimmt. Ist das jeweils der Fall, so ermittle man in Abhängigkeit von n diesen kleinsten bzw. größten Wert.

Aufgabe 291234:

Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen a, mit denen die durch

$$x_1 = \sqrt{a}, \qquad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \qquad (n = 1, 2, ...)$$

definierte Folge (x_n) konvergent ist; man ermittle zu jeder solchen Zahl a den Grenzwert der Folge (x_n).

Aufgabe 291235:

Man beweise: In jeder Menge aus fünf Punkten, die in einer gemeinsamen Ebene liegen und von denen keine drei in einer gemeinsamen Geraden liegen, gibt es vier Punkte, die die Ecken einer konvexen Vierecksfläche sind.

Hinweis: Eine Vierecksfläche heißt genau dann konvex, wenn mit jedem beliebigen Paar von Punkten dieser Fläche jeder Punkt der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte zu der Fläche gehört.

Aufgabe 291236:

Man beweise: Schreibt man alle natürlichen Zahlen n mit $111 \leq n \leq 999$ in beliebiger Reihenfolge hintereinander auf, so erhält man stets die Ziffernfolge einer durch 37 teilbaren Zahl.