29. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1989/1990

Aufgaben

29. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 291211:

Man ermittle die Anzahl aller natürlichen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die dekadische Zifferndarstellung von z besteht aus fünf paarweise verschiedenen Ziffern.

(2) Die erste und die letzte Ziffer darin sind von 0 verschieden.

(3) Ist z' diejenige Zahl, deren Zifferndarstellung aus der von z durch Umkehrung der Reihenfolge entsteht, so besteht die Zifferndarstellung der Zahl $z + z'$ aus sämtlich einander gleichen Ziffern.

Aufgabe 291212:

Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem

$$x^3 + y^3 = 7 \tag{1}$$
$$x + xy + y = -1 \tag{2}$$

erfüllen.

Aufgabe 291213:

In jedem Dreieck ABC zerlegt die Mittelsenkrechte der Seite AB die Fläche dieses Dreiecks in zwei Teilflächen, die so mit T_1, T_2 bezeichnet seien, daß A in T_1 und B in T_2 liegt. Der Flächeninhalt von T_1 sei F_1, der von T_2 sei F_2.

Man ermittle unter allen Dreiecken ABC, die rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C sind, genau diejenigen, für die das Verhältnis $k = F_2 : F_1$ ganzzahlig ist.

Aufgabe 291214:

Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ sei f_n diejenige Funktion, die für alle reellen $x \neq 0$ durch

$$f_n(x) = \frac{1-x}{x} + \frac{2^2-2x}{x} + \frac{3^2-3x}{x} + ... + \frac{n^2-nx}{x}$$

definiert ist.

a) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4!

b) Beweisen Sie: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ hat die Funktion f_n genau eine Nullstelle! Geben Sie diese Nullstelle in Abhängigkeit von n an!

c) Beweisen Sie, daß es eine natürliche Zahl n gibt, mit der die Nullstelle der Funktion f_n größer als 100 ist! Ermitteln Sie die kleinste derartige Zahl n!