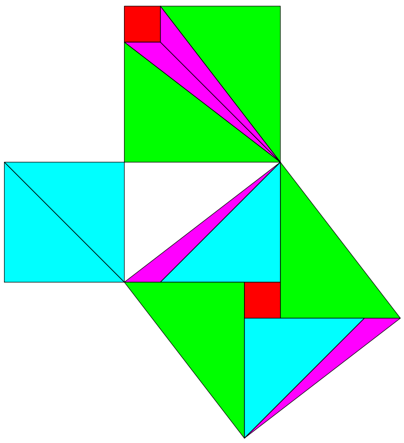
29. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1989/1990

Aufgaben



29. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 290931:

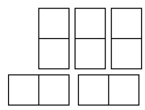
Beschreiben und begründen Sie für die folgende Aufgabe eine Konstruktion, die ausführbar ist, indem außer gezeichnet vorgegebenen Strecken nur Lineal und Zirkel (zum Konstruieren von Geraden und Kreisen, nicht zur Nutzung von Millimeter- oder Grad-Skalen) verwendet werden.

Gezeichnet vorgegeben seien zwei Strecken AB und AC, die einen Winkel $\sphericalangle BAC$ der Größe 7° bilden. Zu konstruieren ist eine Zerlegung dieses Winkels in 7 gleich große Teile.

Das zeichnerische Ausführen der beschriebenen Konstruktion wird nicht verlangt.

Aufgabe 290932:

Aus einem Satz von Dominosteinen soll eine Zusammenstellung von möglichst vielen nebeneinanderliegenden Figuren gebildet werden. Jede dieser Figuren soll die in der Abbildung gezeigte Gestalt haben, ferner soll sie die folgende Bedingung erfüllen:



Liest man in jeder Zeile die drei bzw. vier Zeichen als Zifferndarstellung einer Zahl, so gibt die Figur eine richtig gerechnete Additionsaufgabe an (erste Zeile + zweite Zeile = dritte Zeile). Wie üblich ist die Null als Anfangsziffer nicht zugelassen.

Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von nebeneinanderliegenden Figuren der geforderten Art, die sich aus einem Satz von Dominosteinen bilden lassen!

Hinweis: Jeder Dominostein enthält auf jeder seiner beiden Teilflächen genau eines der Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Der Satz von Dominosteinen (aus dem die Steine für das Bilden der Figuren auszuwählen sind) enthält jeden Stein $\boxed{x}\boxed{y}$ mit $0 \leq x \leq y \leq 6$ genau einmal; beim Bilden der Figuren ist für die Lage der Steine jede Reihenfolge der beiden Zahlen eines verwendeten Steines zugelassen.

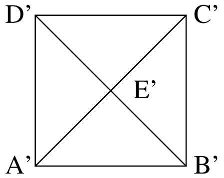
Aufgabe 290933:

Von einem ebenflächig begrenzten Körper werden folgende Bedingungen gefordert:

(1) Der Körper hat genau fünf Eckpunkte A, B, C, D, E.

(2) Bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Bildebene sind die Bildpunkte A', B', C', D', E' die Eckpunkte bzw. der Mittelpunkt eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Blickt man in Projektionsrichtung auf die Bildebene (diese Blickrichtung sei als Richtung von "oben" nach "unten" bezeichnet), so sind die Eckpunkte und Kanten in gleicher Weise unverdeckt sichtbar, wie in der Abbildung angegeben.

(3) Die durch A, B, C gehende Ebene ε ist parallel zu der in (2) genannten Bildebene.



(4) Der Punkt D liegt "oberhalb" der Ebene ε im Abstand $\frac{a}{2}$ von ihr.

(5) Der Punkt E liegt "oberhalb" der Ebene ε im Abstand a von ihr.

(6) Der Körper hat das Volumen $\frac{1}{4} \cdot a^3$.

Zeigen Sie, daß der Körper durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt ist, und zeichnen Sie diesen Körper in schräger Parallelprojektion!

Aufgabe 290934:

Beweisen Sie, daß es zu je zwei beliebigen rationalen Zahlen a, b mit $a < b$ eine rationale Zahl x und eine irrationale Zahl y gibt, für die $a < x < y < b$ gilt!

Aufgabe 290935:

a) Beweisen Sie, daß es zu jeder Funktion f, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung

$$f(x-1) = (x^2 - 1) \cdot f(x+1) \tag{1}$$

erfüllt, unendlich viele verschiedene reelle Zahlen x mit $f(x) = 0$ gibt.

b) Beweisen Sie, daß es eine Funktion f gibt, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung (1) erfüllt, bei der aber nicht jede reelle Zahl x den Funktionswert $f(x) = 0$ hat!

Aufgabe 290936:

Es seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die einander von außen berühren. Für ihre Radien r_1 bzw. r_2 gelte $r_1 > r_2$. Eine Gerade, die k_1 und k_2 in zwei voneinander verschiedenen Punkten berührt, sei t. Die von t verschiedene und zu t parallele Tangente an k_1 sei u.

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von r_1 und r_2 den Radius r_3 desjenigen u berührenden Kreises k_3, der k_1 und k_2 von außen berührt!