29. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Saison 1989/1990

Aufgaben

29. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

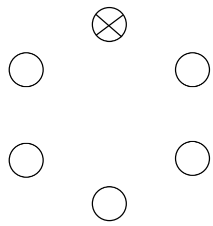
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 290921:

Kann man in einer Ebene eine Figur bilden, die aus genau 1 989 Geraden besteht und dadurch mehr als 2 Millionen Schnittpunkte enthält?

Aufgabe 290922:

Auf die Felder der Abbildung sollen drei weiße und drei schwarze Steine verteilt werden, auf jedes Feld ein Stein. Ferner wird eine natürliche Zahl $a \geq 1$ fest vorgegeben. Nun soll, beginnend mit dem angekreuzten Feld, im Uhrzeigersinn umlaufend, Stein für Stein weitergezählt werden, von 1 bis a.



Der Stein, der dabei die Nummer a erhält, wird weggenommen. Anschließend beginnt das Abzählen wieder mit 1 bei dem im Uhrzeigersinn folgenden Stein, und wieder wird der Stein, der die Nummer a erhält, weggenommen.

Dann schließt sich noch eine dritte Durchführung dieses Abzählens und Wegnehmens an. Bei diesen Fortsetzungen ist zu beachten, daß leere Felder nicht mitgezählt, sondern übersprungen werden.

a) Es sei $a = 4$. Wie sind zu Beginn die Steine zu verteilen, damit am Ende die drei weißen Steine übrigbleiben?

b) Jemand vermutet: "Wenn man a durch $a + 6$ ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine."

   Widerlegen Sie die Vermutung, indem Sie sie für $a = 4$ nachprüfen!

c) Beweisen Sie, daß es eine Zahl z gibt, mit der für jedes $a \geq 1$ die folgende Aussage wahr ist:

   "Wenn man a durch $a + z$ ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine -auch bei Abzählbeginn im angekreuzten Feld- ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine."

Aufgabe 290923:

Man ermittle die kleinste natürliche Zahl n, für die (bei Darstellung im dekadischen Positionssystem) 5 sowohl Teiler der Quersumme von n als auch Teiler der Quersumme von $n + 1$ ist.

Aufgabe 290924:

Die Abbildung stellt sechs Punkte A, B, C, D, E, F in senkrechter Eintafelprojektion mit zugehörigem Höhenmaßstab dar. Die Punkte C', B', D' und ein vierter nicht bezeichneter Punkt sind in dieser Reihenfolge die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seitenlänge $a = 6$ cm. Die Punkte A' und F' sind der in der Abbildung ersichtlichen Quadratseiten. Im Höhenmaßstab haben A, F von B, D den Abstand 3 cm und C, E von B, D den Abstand 6 cm.

a) Zeichnen Sie in schräger Parallelprojektion, wobei mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ sei, eine Darstellung desjenigen Würfels, zu dem die Eckpunkte B, C, D, E gehören, und dazu die Punkte A und F!

b) Zeichnen Sie anschließend die Dreiecksflächen ABC und DEF durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten sowie der Schnittstrecke XY, die diese beiden Dreiecksflächen miteinander gemeinsam haben!

Berücksichtigen Sie in a) und b) die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch eine davorliegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wiedergegeben werden! Eine Verdeckung durch davorliegende Seitenflächen des Würfels soll dagegen nicht berücksichtigt werden (diese Flächen sind als "nicht vorhanden" oder "durchsichtig" zu betrachten).

Verdeutlichen Sie die sichtbaren Teile der Dreiecksflächen durch Schraffur, im Dreieck ABC parallel zu CB, im Dreieck DEF in dichterer Schraffur parallel zu DE!

c) Geben Sie für die Schnittstrecke XY eine Herleitung der - von Ihnen in b) verwendeten - Konstruktion der Bildpunkte von X und Y! Beschreiben Sie diese Konstruktion!