# 29. Mathematik Olympiade
# 3. Stufe (Bezirksolympiade)
# Klasse 8
# Saison 1989/1990

Aufgaben

# 29. Mathematik-Olympiade
# 3. Stufe (Bezirksolympiade)
# Klasse 8
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

## Aufgabe 290831:

Eine Aufgabe des bedeutenden englischen Naturwissenschaftlers Isaak Newton (1643 bis 1727) lautet:

> Ein Kaufmann besaß eine gewisse Geldsumme.
>
> Im ersten Jahr verbrauchte er davon 100 Pfund; zum Rest gewann er durch seine Arbeit ein Drittel desselben dazu.
>
> Im zweiten Jahr verbrauchte er wiederum 100 Pfund und gewann zum Rest ein Drittel dazu.
>
> Im dritten Jahr verbrauchte er erneut 100 Pfund und gewann zum Rest ein Drittel dazu.
>
> Dabei stellte er fest, daß sich sein Geld gegenüber dem Anfang des ersten Jahres verdoppelt hatte.

Ermittle aus diesen Angaben, welche Geldsumme anfangs des ersten Jahres vorhanden gewesen sein muß! Weise nach, daß bei dieser Anfangssumme die Angaben des Aufgabentextes zutreffen!

## Aufgabe 290832:

Einem Kreisausschnitt soll ein Quadrat so einbeschrieben werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Die - aus zwei Strecken (Radien) und einem Kreisbogen bestehende - Randlinie des Kreisausschnittes enthält die vier Eckpunkte des Quadrates.

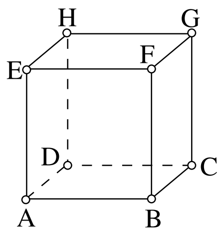
(2) Der Kreisbogen wird durch zwei dieser Eckpunkte in drei gleichlange Teilbögen zerlegt.

Untersuche, ob durch diese Bedingungen die Größe $\alpha$ des Zentriwinkels des Kreisausschnittes eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, so gib diese Größe an!

## Aufgabe 290833:

In einem Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) seien $V$, $W$, $X$, $Y$ in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seitenflächen $ABCD$, $BCGF$, $EFGH$ bzw. $ABFE$.

Beweise, daß unter dieser Voraussetzung die Strecken $VW$, $WX$, $XY$ und $YV$ sämtlich einander gleichlang sind!



Aufgabe 290834:

Ermittle alle diejenigen Tripel $(a, b, c)$ natürlicher Zahlen $a$, $b$ und $c$, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen!

(1) Es gilt $a + b = c^3$.

(2) Es gilt $a + b + c = 130$.

(3) Die Zahl $a - b$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von 19.

Aufgabe 290835:

Aus einer sechsstelligen natürlichen Zahl $n$ soll eine weitere Zahl errechnet werden, indem eine Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division mit einer höchstens dreistelligen natürlichen Zahl durchgeführt wird, wobei nur die Multiplikation mit 0 und die Division durch 0 nicht zugelassen sind. Auf das Ergebnis soll wieder eine der genannten Rechenoperationen angewandt werden, auf das neue Ergebnis ebenfalls usw. Erst wenn ein Ergebnis den Wert 0 hat, soll das Bilden weiterer Zahlen nicht mehr fortgesetzt werden.

a) Gibt es sechsstellige Zahlen $n$, von denen ausgehend das Ergebnis 0 bereits mit zweimaligem Ausführen derartiger Rechenoperationen erreichbar ist?

b) Beweise, daß von jeder sechsstelligen Zahl $n$ aus, die nicht größer als 999 000 ist, das Ergebnis 0 mit höchstens dreimaligem Ausführen derartiger Rechenoperationen erreichbar ist!

Aufgabe 290836:

Von einem Viereck $ABCD$ wird gefordert, daß es ein Trapez mit $AB \parallel DC$, $e = 7$ cm, $f = 6$ cm, $a = 48°$, $e = 114°$ ist, wobei $e$ die Länge der Diagonale $AC$, $f$ die Länge der Diagonale $BD$, $\alpha$ die Größe des Winkels $\sphericalangle DAB$ und, wenn $S$ der Schnittpunkt von $AC$ mit $BD$ bezeichnet, $\epsilon$ die Größe des Winkels $\sphericalangle ASB$ ist.

a) Beweise: Wenn ein Viereck diese Forderungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Längen und Winkelgrößen konstruiert werden!

b) Beschreibe eine solche Konstruktion und fertige eine Konstruktionszeichnung an!

c) Beweise: Wenn ein Viereck nach der Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Forderungen!

d) Beweise, daß durch die Forderungen ein Viereck $ABCD$ auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!