28. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1988/1989

Aufgaben

28. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 281241:
Man ermittle alle reellen Lösungen $(x,\, y,\, z)$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\ x + 2y + 3z &= \sqrt{14}. \end{aligned}$$

Aufgabe 281242:
Man untersuche, ob es zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ jeweils eine Funktion f gibt, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert.

(2) Es gibt eine reelle Zahl x mit $f(x) \neq 0$.

(3) Wenn man Funktionen $f_1,\, f_2,\, ...,\, f_{n+1}$ durch die Festsetzungen definiert, für alle reellen x gelte

$$f_1(x) = f(x) \quad \text{sowie} f_{k+1}(x) = f(f_k(x)) \quad \text{für } \ k = 1, 2, ..., n,$$

dann gilt für alle reellen x die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_{n+1}(x).$$

Aufgabe 281243:
Man ermittle alle diejenigen konvexen Vielecke $P_1P_2...P_n$, in deren Inneren ein Punkt X existiert, für den $\overline{P_1X}^2 + \overline{P_2X}^2 + ... + \overline{P_nX}^2$ gleich dem Doppelten Flächeninhalt von $P_1P_2...P_n$ ist.

Aufgabe 281244:
Um einen Tresor zu öffnen, ist eine unbekannte dreistellige Zahlenkombination (a_1, a_2, a_3) einzustellen, wobei die drei Zahlen unabhängig voneinander eingestellt werden können und für die jede der drei Zahlen genau 8 Werte möglich sind. Infolge eines Defektes öffnet sich aber der Tresor bereits immer genau dann, wenn eine eingestellte Kombination (k_1, k_2, k_3) mindestens zwei der drei Bedingungen $k_i = a_i$ $(i = 1, 2, 3)$ erfüllt.

Man ermittle die kleinste Zahl N, für die es N Kombinationen gibt, bei deren Durchprobieren der Tresor in jedem Fall (d.h. für jede unbekannte Kombination $(a_1,\, a_2,\, a_3)$) sich öffnen muß.

Aufgabe 281245:
Für ein Tetraeder $ABCD$ werde vorausgesetzt, das der Mittelpunkt M der Umkugel des Tetraeders im Innern des Tetraeders liegt. Die Verbindungsgerade von M mit jeweils einer Tetraederecke A, B, C bzw. D

schneide die Seitenfläche des Tetraeders, die der betreffenden Ecke gegenüberliegt, in A', B', C' bzw. D'. Der Radius der Umkugel sei r.

Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen stets

$$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} + \overline{DD'} \geq \frac{16}{3}r \quad \text{folgt!}$$

Aufgabe 281246A:

Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 1$ und für je $n+2$ reelle Zahlen p, q, a_1, a_2, ..., a_n, die

$$0 < p \leq a_i \leq q \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{1}$$

erfüllen, gelten die beiden Ungleichungen

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \leq n^2 + \left[\frac{n^2}{4}\right] \cdot \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 . \tag{2}$$

Hinweis: Zu reellem x bezeichnet wie üblich $[x]$ die ganze Zahl $[x] = g$ mit $g \leq x < g + 1$.

Man ermittle ferner zu gegebenen n, p, q mit $0 < p \leq q$ alle diejenigen a_i mit (1), für die in (2)

a) zwischen der ersten und zweiten Zahl,

b) zwischen der zweiten und dritten Zahl

das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 281246B:

Man ermittle die größtmögliche Anzahl von Quadraten der Seitenlänge 1, die sich in ein gegebenes Quadrat der Seitenlänge 1,99 legen lassen, ohne über dessen Rand hinauszuragen und ohne sich gegenseitig zu überlappen.