28. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1988/1989

Aufgaben

28. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 281231:

Man ermittle alle diejenigen aus je drei Gliedern bestehenden Folgen $(a_1,\, a_2,\, a_3)$ und $(b_1,\, b_2,\, b_3)$, die mit zwei geeigneten von Null verschiedenen reellen Zahlen p, r sowie mit $q = 5$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

(1) Es gilt $a_1 = \frac{1}{p}$, $a_2 = \frac{2}{q}$, $a_3 = \frac{1}{3}$.

(2) Es gilt $b_1 = \frac{1}{a_1}$, $b_2 = \frac{1}{a_1 \cdot a_2}$, $b_3 = \frac{1}{a_2 \cdot a_3}$

(3) Die Folge $(a_1,\, a_2,\, a_3)$ ist eine arithmetische Folge.

(4) Die Folge $(b_1,\, b_2,\, b_3)$ ist eine arithmetische Folge.

Aufgabe 281232:

Gegeben seien ein Punkt A in einer Ebene ε sowie eine Länge a.

Man ermittle die Menge alle derjenigen Punkte C in ε, zu denen es jeweils Punkte B und D so gibt, daß $ABCD$ ein Parallelogramm mit $\overline{AB} = a$ und $\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{BD} : \overline{AD}$ ist.

Aufgabe 281233A:

Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, zu jedem $i = 1, 2, ..., n$ eine natürliche Zahl a_i so anzugeben, daß die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

(1) Für alle i mit $1 \leq i \leq n$ gilt $0 \leq a_i \leq \frac{1}{2}(n-1) \cdot n$.

(2) Keine zwei unter den Differenzen $a_j - a_i$, die man für alle i, j mit $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ und $i \neq j$ bilden kann, sind einander gleich.

Aufgabe 281233B:

Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ sei die folgende Forderung betrachtet: Man soll $2n$ Gegenstände so in n (genügend große) Behälter verteilen, daß die nachstehenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jeder Behälter enthält mindestens einen der Gegenstände.

(2) Jeder Behälter enthält höchstens n der Gegenstände.

(3) Es ist nicht möglich, die n Behälter so in zwei getrennten (genügend großen) Räumen unterzubringen, daß dabei in jeden der beiden Räume n der Gegenstände gelangen.

a) Geben Sie für $n = 3$ eine Verteilung von 6 Gegenständen in 3 Behälter an, und weisen Sie nach, daß die von Ihnen angegebene Verteilung die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

b) Beweisen Sie, daß es genau dann möglich ist, die Forderung zu erfüllen, wenn n eine ungerade Zahl ist!

c) Ermitteln Sie für jedes ungerade $n \geq 3$ alle Verteilungen der geforderten Art!

Aufgabe 281234:
Man untersuche, ob es 21 paarweise verschiedene ganze Zahlen sowie eine Reihenfolge

$$a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{21} \qquad (*)$$

dieser Zahlen so gibt, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für je vier in der Reihenfolge (*) unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen ergibt sich eine negative Summe dieser vier Zahlen.

(2) Die Summe aller 21 Zahlen ergibt 1 989.

Aufgabe 281235:
Beweisen Sie folgenden Satz!

Wenn (x_n) eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen ist, die für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + ... + \frac{x_{n^2}}{n} \leq 1$$

erfüllt, dann erfüllt sie auch für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + ... + \frac{x_n}{n} \leq 3.$$

Aufgabe 281236:
Es sei d eine gegebene Streckenlänge. Ferner sei M die Menge aller derjenigen Pyramiden $ABCS$, die den folgenden Bedingungen genügen:

(1) Das Dreieck ABC ist gleichseitig.

(2) Das Lot von S auf die Ebene durch A, B, C hat den Schwerpunkt des Dreiecks ABC als Fußpunkt.

(3) Der Abstand zwischen den Kanten AS und BC beträgt d.

Untersuchen Sie, ob es in der Menge M eine Pyramide mit kleinstem Volumen gibt! Ist das der Fall, so ermitteln Sie in Abhängigkeit von d dieses kleinstmögliche Volumen!

Hinweis: Unter dem Abstand zwischen zwei Strecken UV und XY, von denen UV auf einer Geraden g und XY auf einer zu g windschiefen Geraden h liegt, versteht man die Länge der Strecke GH, wo G auf g, H auf h liegt und GH sowohl g als auch h senkrecht schneidet. Diese Erklärung gilt auch für den Fall, daß derartige Punkte G, H sogar den Stecken UV bzw. XY angehören.