28. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Saison 1988/1989

Aufgaben

28. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 280831:
Zwei wanderlustige Freunde A und B beschließen, auf einer Wanderstrecke von 30 km einander entgegenzugehen. Zu Beginn befindet sich A an einem Endpunkt, B an dem anderen Endpunkt dieser Strecke. Sie verständigen sich telefonisch über ihr Vorhaben und nehmen dabei an, daß jeder von ihnen seine persönliche Marschgeschwindigkeit während des ganzen Weges gleichbleibend beibehält. Damit erhalten sie die folgenden Aussagen:

(1) Wenn A 2 Stunden eher startet als B, so treffen sie sich $2\frac{1}{2}$ Stunden nach dem Start von B.

(2) Wenn aber B 2 Stunden eher startet als A, so treffen sie sich 3 Stunden nach dem Start von A.

Zeige, daß unter diesen Voraussetzungen, wenn die Aussagen (1) und (2) zutreffen, die Marschgeschwindigkeiten von A und B eindeutig bestimmt sind; ermittle diese Geschwindigkeiten!

Überprüfe, daß auch umgekehrt gilt: Wenn A und B die ermittelten Geschwindigkeiten haben, dann treffen die Aussagen (1) und (2) zu.

Aufgabe 280832:
Beweise den folgenden Satz!

> Wenn $ABCD$ ein Quadrat ist, M der Mittelpunkt von AB, N der Mittelpunkt von BC und P der Schnittpunkt der Strecken CM und DN ist, dann gilt $\overline{AD} = \overline{AP}$.

Aufgabe 280833:
Beweise die folgende Aussage!

> Stets, wenn irgendwelche sechs unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen vorliegen, ist es unmöglich, diese sechs Zahlen so in zwei Gruppen einzuteilen, daß das Produkt der Zahlen einer Gruppe gleich dem Produkt der Zahlen der anderen Gruppe ist.

Hinweis: Enthält bei einer Einteilung eine der zwei Gruppen nur eine Zahl, so gilt diese Zahl als das "Produkt" der Zahlen dieser Gruppe.

Aufgabe 280834:
Für ein Schulsportfest möchte die Klasse 8c aus den sieben im 100-m-Lauf besten Schülern eine aus vier Schülern bestehende Mannschaft zum 4×100-m-Staffellauf auswählen.

a) Wieviel verschiedene Mannschaften könnten aus den sieben Schülern ausgewählt werden?

b) Wieviel verschiedene Mannschaften könnten aus den Schülern ausgewählt werden, wenn auf jeden Fall zwei bestimmte der sieben Schüler dabei sein sollen?

c) Wieviel verschiedene Mannschaften könnten aus den Schülern ausgewählt werden, wenn auf jeden Fall drei bestimmte der sieben Schüler dabei sein sollen?

d) In wie viel verschiedenen Reihenfolgen ihrer Starts lassen sich stets die vier Schüler einer Mannschaft zum Staffellauf aufstellen?

Aufgabe 280835:

Es sei ABC ein Dreieck, α sei die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Der Inkreis des Dreiecks berühre die Seite AB in D, die Seite BC in E und die Seite AC in F.

Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle FDE$ in Abhängigkeit von α und β!

Hinweis: Der Inkreis eines Dreiecks ist derjenige Kreis, der alle drei Seiten des Dreiecks von innen berührt.

Aufgabe 280836:

Gegeben seien zwei Strecken; für ihre Längen p und q gelte $p < q$. Gesucht ist ein Viereck $ABCD$, das die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt.

(1) Das Viereck $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.

(2) Es gilt $\overline{AB} = p$ und $\overline{CD} = q$.

(3) Es gibt einen Kreis, auf dem die Punkte A, B, C und D liegen und dessen Radius p beträgt.

I. Zeige, daß ein Viereck, wenn es die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, aus p und q konstruiert werden kann!

II. Beschreibe eine solche Konstruktion!

III. Zeige, daß ein Viereck, wenn es nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

IV. Untersuche, unter welchen Bedingungen für die gegebenen Lösungen p und q ein solches Viereck

   a) existiert,

   b) bis auf Kongruenz eindeutig durch p und q bestimmt ist!