28. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1988/1989

Aufgaben

28. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 280731:

Das Volumen eines Würfels w_1 ist achtmal so groß wie das Volumen eines Würfels w_2. Wäre das Volumen von w_2 um genau $9\,\text{cm}^3$ kleiner, so wäre es gleich einem Zwölftel des Volumens von w_1.

Ermittle aus diesen Angaben die Kantenlängen a_1 und a_2 der beiden Würfel w_1 und w_2!

Aufgabe 280732:

In einer Fabrik zur Herstellung von alkoholhaltigen Essenzen soll aus einem Restbestand von 300 kg 32prozentigem Alkohol durch Zugabe von 90prozentigem Alkohol ein neuer Bestand von 40prozentigem Alkohol hergestellt werden.

Ermittle diejenige Menge 90prozentigen Alkohols, mit der das erreicht wird!

Aufgabe 280733:

Gegeben sei ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck ABC. Gesucht ist eine Gerade g, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Die Gerade g ist parallel zu AB, sie schneidet die Seite AC in einem Punkt D und die Seite BC in einem Punkt E.

(2) Für diese Punkte gilt $\overline{AD} + \overline{BE} = \overline{DE}$.

I. Zeige, daß eine Gerade g, wenn sie die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, zu dem Dreieck konstruiert werden kann!

II. Beschreibe eine solche Konstruktion!

III. Zeige, daß eine Gerade g, wenn sie nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1) und (2) erfüllt!

IV. Konstruiere ein beliebiges spitzwinkliges, nicht gleichschenkliges Dreieck ABC und zu diesem nach deiner Beschreibung auch g!

Aufgabe 280734:

Ermittle alle diejenigen Paare (p, q) aus zwei Primzahlen, die die folgenden Bedingungen erfüllen!

(1) Es gilt $q > p + 1$.

(2) Die Zahl $s = p + q$ ist ebenfalls eine Primzahl.

(3) Die Zahl $p \cdot q \cdot s$ ist durch 10 teilbar.

Aufgabe 280735:

Beweise, daß für jedes Dreieck ABC folgende Aussage gilt:

Wenn D, E, F in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten BC, CA, AB sind und wenn A', B', C', D', E', F' die Fußpunkte der Lote von A, B, C, D, E, F auf eine Gerade g sind, die ganz außerhalb des Dreiecks ABC verläuft und auf keiner der verlängerten Seiten BC, CA, AB senkrecht steht, dann gilt stets

$$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = \overline{DD'} + \overline{EE'} + \overline{FF'}$$

Aufgabe 280736:

Auf einer Kreislinie seien die natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 der Reihe nach angeordnet. Dann wird, beginnend mit der Zahl 1, jede fünfzehnte Zahl mit einer Markierung versehen, d.h., die Zahlen 1, 16, 31, 46, ... u.s.w. werden markiert.

Dieses Weiterzählen und Markieren jeder fünfzehnten Zahl wird umlaufend fortgesetzt, d.h., beim Weiterzählen läßt man auf die Zahl 1000 wieder die Zahl 1 folgen. Auch Zahlen, die bereits markiert sind, werden beim Weiterzählen stets mit berücksichtigt. Erst wenn zum weiteren Markieren nur noch Zahlen erreicht würden, die bereits markiert sind, wird der Vorgang beendet.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen Zahlen auf dem Kreis, die dann ohne Markierung geblieben sind!