27. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1987/1988

Aufgaben

27. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 271231:

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, die das folgende Ungleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x^4 - 6x^2 + 8 \leq 0 \qquad (1)$$
$$2x^2 - 3x > 0 \qquad (2)$$

Aufgabe 271232:

Ein Auto soll einen Rundkurs in einem vorgeschriebenen Umlaufsinn durchfahren. Das zur Verfügung stehende Benzin reicht genau zum einmaligen Durchfahren des Kurses, wurde aber vorher willkürlich in eine Anzahl $n \geq 1$ von Kanistern verteilt, die ebenfalls willkürlich längs des Rundkurses aufgestellt sind. Der Tank des Autos ist zu Beginn leer und besitzt ausreichendes Fassungsvermögen, um beim Erreichen jedes Kanisters dessen Benzin aufzunehmen.

Man beweise, daß es möglich ist, den Startpunkt des Autos so zu wählen, daß der Kurs genau einmal durchfahren werden kann. (Eventuelle Verluste beim Umfüllen, Mehrverbrauch bei wiederholten Anfahren u.s.w. sollen nicht berücksichtigt werden.)

Aufgabe 271233A:

Man ermittle den größten Wert, den der Flächeninhalt des Bildes eines beliebig im Raum liegenden Quaders Q mit gegebenen Kantenlängen a, b, c bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Ebene annehmen kann.

Aufgabe 271233B:

Es sei f diejenige für alle geordneten Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen x, y definierte Funktion, die für alle natürlichen Zahlen x, y die folgenden Gleichungen (1), (2), (3) erfüllt:

$$f(0, y) = y + 1, \qquad (1)$$
$$f(x + 1, 0) = f(x, 1), \qquad (2)$$
$$f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y)). \qquad (3)$$

Man ermittle

a) den Funktionswert $f(3, 3)$,

b) den Funktionswert $f(4, 2)$.

Hinweis: Gegebenenfalls kann die Angabe eines gesuchten Funktionswertes durch einen rechnerischen Ausdruck mit konkret angegebenen Rechenoperationen erfolgen, wenn deren zahlenmäßige Ausführung ohne Rechenhilfsmittel eine zu lange Rechenzeit erfordern würde.

Aufgabe 271234:

Man beweise für jedes Dreieck ABC: Bezeichnen wie üblich b, c, h_a die Längen der Seiten AC, AB bzw. der auf BC senkrechten Höhe und α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$, so gilt

$$h_a \leq \sqrt{bc} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}. \tag{1}$$

Man ermittle alle diejenigen Dreiecke ABC, bei denen in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

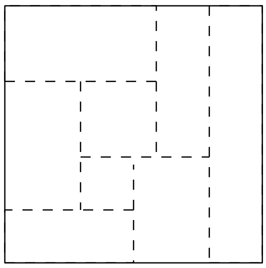
Aufgabe 271235:

Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen, die die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$1\,243 \cdot (1 + yz) = 65 \cdot (xyz + x + z). \tag{1}$$

Aufgabe 271236:

Ein quadratisches Feld Q der Seitenlänge 10 km ist von einem Wassergraben u umgeben. Zur Bewässerung soll Q durch Anlegen weiterer Gräben g vollständig in rechteckige Teilfelder F_1, F_2, ..., F_n zerlegt werden. (Die Breite der Gräben werde vernachlässigt; die Abbildung zeigt ein Beispiel für eine solche Zerlegung.)



Ferner werde gefordert, daß jeder Punkt der Fläche Q nicht weiter als 100 m von einem Wassergraben (u oder g) entfernt ist.

a) Man beweise: Wenn diese Forderung durch Gräben g einer Gesamtlänge von L Kilometern erfüllt wird, so folgt stets $L \geq 480$.

b) Man beweise, daß es einen kleinsten Wert gibt, den L (bei Erfüllung der genannten Forderung) annehmen kann, und ermittle diesen Wert.