27. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1987/1988

Aufgaben

27. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 271221:

Man ermittle alle Paare (x, y) von Null verschiedener reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x \cdot \left(1 + \frac{x}{y}\right) = 6, \tag{1}$$

$$y \cdot \left(1 + \frac{y}{x}\right) = 3 \tag{2}$$

Aufgabe 271222:

Es sei $ABCD$ ein beliebiges ebenes konvexes Viereck; k sei eine beliebige positive reelle Zahl. Die Punkte P, Q, R, S mögen in dieser Reihenfolge die Seiten AB, BC, CD, DA dieses Vierecks jeweils im Verhältnis $k : 1$ teilen.

Man ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte der Vierecke $PQRS$ und $ABCD$.

Aufgabe 271223:

a) Für jede natürliche Zahl n werde eine Funktion f (mit dem Definitionsbereich aller rellen $x \neq 0$) durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (k-2) \cdot x^k$$

definiert. Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die die so erklärte Funktion f die Gleichung $f(-1) = -f(1)$ erfüllt.

b) Für jede natürliche Zahl n werde eine Funktion g (mit demselben Definitionsbereich) durch

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3k-2} \cdot x^k$$

definiert.

Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl n gibt, für die die so erklärte Funktion g die Gleichung $g(-1) = -g(1)$ erfüllt.

Aufgabe 271224:

a) Über eine Menge M, die aus genau 1 987 Personen besteht, wird vorausgesetzt, daß jede Person aus M mit höchstens 5 anderen Personen aus M bekannt ist.

   Man beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Es gibt eine aus mindestens 332 Personen bestehende Untermenge U von M mit der Eigenschaft, daß keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist.

b) Man gebe ein Beispiel für eine Menge M aus genau 1 988 Personen, für die folgende Aussagen zutreffen: Jede Person aus M ist mit genau 5 Personen aus M bekannt; jede Untermenge U von M mit der Eigenschaft, daß keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist, besteht aus höchstens 333 Personen.

In diesen Aufgaben werde stets angenommen, daß eine Person X genau dann mit einer Person Y bekannt ist, wenn Y mit X bekannt ist.