27. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1987/1988

Aufgaben

27. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 270931:

a) Beweisen Sie, daß die Gleichung

$$x_1^{11} + x_2^{11} + ... + x_{1\,987}^{11} = 1\,988 \qquad (1)$$

keine reelle Lösung $(x_1, x_2, ..., x_{1\,987})$ besitzt, in der alle Zahlen x_1, x_2, ... , $x_{1\,987}$ natürliche Zahlen sind!

b) Beweisen Sie, daß die Gleichung (1) unendlich viele verschiedene Lösungen besitzt, in denen alle Zahlen ganze Zahlen sind!

Dabei heißen zwei Lösungen $(x_1, x_2, ..., x_{1\,987})$ und $(x'_1, x'_2, ..., x'_{1\,987})$ genau dann von einander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen $x_1 \neq x'_1$, $x_1 \neq x'_1$, ... , $x_{1\,987} \neq x'_{1\,987}$ gilt.

Aufgabe 270932:

(I) Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:

Wenn a, b, c, d reelle Zahlen sind, für die $b \neq 0$, $b + c \neq 0$ und $b + d \neq 0$ gilt, so folgt aus

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad \text{stets auch} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}.$$

(II) Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:

Wenn a, b, c, d positive reelle Zahlen sind, so folgt aus

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad \text{stets auch} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}.$$

Aufgabe 270933:

Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, dessen Seiten AB und CD so gelegen sind, daß sich die Verlängerung von AB über B hinaus und die Verlängerung von DC über C hinaus in einem Punkt T schneiden. Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ATD$ sei h. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD sei S; die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ASD$ sei g.

Beweisen Sie: Aus diesen Voraussetzungen folgt stets, daß g und h zueinander parallel sind.

Bemerkung: Auch in dem Spezialfall, daß g und h in dieselbe Gerade fallen, werden sie als zueinander parallel bezeichnet.

Aufgabe 270934:

Jens zeichnet auf ein Blatt Papier einige Punkte, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Er verbindet einige Male irgend zwei dieser Punkte durch eine Strecke. Dabei kommt es auch vor, daß Punkte jeweils mit mehr als einem anderen Punkt verbunden sind.

Dirk zählt nun die von jedem Punkt ausgehenden Strecken und ermittelt dann die Anzahl A aller derjenigen Punkte, von denen jeweils eine ungerade Anzahl von Strecken ausgeht.

Christa behauptet dann, ohne zu wissen, wie viele Punkte Jens gezeichnet hat und welche Punkte er mit welchen anderen verbunden hat, die Anzahl A müsse in jedem Fall eine gerade Zahl sein.

Trifft das zu?

Aufgabe 270935:

Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt, für die $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ eine Primzahl ist!

Aufgabe 270936:

Auf dem Arbeitsblatt ist das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Würfels $ABCDEFGH$ bei einer schrägen Parallelprojektion gegeben. Diese ist so gewählt, daß die Fläche $ABFE$ ohne Verzerrung in wahrer Größe $A'B'F'E'$ erscheint.

a) Beweisen Sie folgende Aussage:

   Es gibt auf der Strecke EG genau einen Punkt P_0 mit der Eigenschaft, daß die Summe $\overline{CP_0} + \overline{P_0F}$ kleiner ist als die Summe $\overline{CP} + \overline{PF}$ für jeden anderen Punkt P auf EG.

b) Leiten Sie eine Möglichkeit her, das Bild P_0' dieses Punktes P_0 bei der Parallelprojektion auf dem Arbeitsblatt zu konstruieren! Führen Sie die Konstruktion durch! Beschreiben Sie ihre Konstruktion!

Hinweis: CP_0, P_0F, CP, PF bezeichnen Strecken im Raum, nicht ihre Bildstrecken in der Zeichenebene.